



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-9390-TDI/822

**UM ELEMENTO TRIANGULAR PLANO PARA PLACAS E
CASCAS LAMINADAS**

Sérgio Tsuyoshi Goto

Dissertação de Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, orientada pelos Drs. Eliseu Lucena Neto e Dr. Mário Kataoka Filho, aprovada em 26 de setembro de 2002.

INPE
São José dos Campos
2002

629.7.023

GOTO, S. T.

Um elemento triangular plano para placas e cascas laminadas / S. T. Goto - São José dos Campos: INPE, 2002.
78p. – (INPE-9390-TDI/822).

1.Métodos de elementos finitos. 2.Travamento. 3.Placas. 4.Cascas. 5.Teoria de Reissner. 6.Laminados. I.Título.

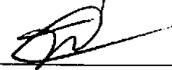
Aprovado pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de **Mestre em**
Engenharia e Tecnologia
Espaciais/Mecânica Espacial e
Controle.

Dr. Mario César Ricci



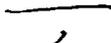
Presidente/INPE/SJCampos-SP

Dr. Eliseu Lucena Neto



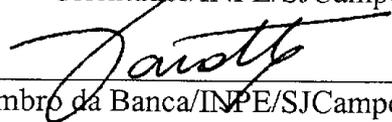
Orientador/ITA/IEI/CTA/SJCampos-SP

Dr. Mário Kataoka Filho



Orientador/INPE/SJCampos-SP

Dr. Sebastião Eduardo Corsatto Varotto



Membro da Banca/INPE/SJCampos-SP

Dr. Ariovaldo Félix Palmério



Membro da Banca
Convidado IAE/CTA/SJCampos-SP

Candidato: Sérgio Tsuyoshi Goto

São José dos Campos, 26 de setembro de 2002.

A meus pais,

Kaoru Goto e Atsuko Goto.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Eliseu Lucena Neto agradeço por sua excepcional orientação, pelos valiosos ensinamentos e incentivo. Exemplo de profissionalismo ímpar que engrandece o sistema educacional do Brasil.

Ao Professor Mário Kataoka Filho pelo incentivo e orientação inicial.

Aos membros da Banca Examinadora pelas contribuições dadas a este trabalho.

Aos professores do INPE, ITA e UNICAMP pelos valiosos ensinamentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa concedida.

À minha família e amigos que tanto me apoiaram neste trabalho.

RESUMO

O elemento triangular plano de seis nós, aqui apresentado para a análise de placas e cascas laminadas, é baseado na teoria de Reissner-Mindlin. Os componentes u , v , w do deslocamento da superfície média e os componentes $\bar{\alpha}_x$, $\bar{\alpha}_y$ da rotação da normal a essa superfície são aproximados por polinômios quadráticos. O elemento utiliza-se de uma modificação criteriosa na variação quadrática das deformações de cisalhamento transversal, decorrente da aproximação polinomial adotada, para se ajustar a uma variação linear que elimina o travamento associado a essas deformações (shear locking). A possibilidade de travamento devido ao acoplamento das rigidezes de membrana e de flexão nas interfaces de elementos não coplanares (membrane locking) é discutida e exemplificada. A implementação computacional do elemento é simples pois todas as parcelas da matriz de rigidez são explicitamente obtidas e, com exceção da parcela proveniente do cisalhamento transversal, apresentam o mesmo padrão algébrico. As aplicações numéricas mostram um bom desempenho do elemento.

A FLAT TRIANGULAR LAMINATED PLATE AND SHELL ELEMENT

ABSTRACT

The six-node flat triangular element, herein presented for laminated plate and shell analysis, is based on Reissner-Mindlin theory. The mid-surface displacement components u, v, w and the rotation components $\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$ of the normal to the mid-surface are approximated by quadratic polynomials. The quadratic variation of the transverse shear strain, as a result of the adopted approximation, is modified to give a linear variation that avoids shear locking. The membrane locking possibility due to the joining of the membrane and bending rigidities in the interfaces of non-coplanar elements is discussed and exemplified. The membrane, bending, membrane-bending coupling and the transverse shear parts of the stiffness matrix are explicitly obtained and, with exception of the transverse shear part, have all the same algebraic pattern, what makes simple the element for computational implementation. Numerical results show the element good performance.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES BÁSICAS	17
2.1 Campo de Deslocamentos	17
2.2 Relação Deformação-Deslocamento	19
2.3 Equações Constitutivas	19
2.4 Princípio dos Deslocamentos Virtuais	24
CAPÍTULO 3 - ELEMENTO FINITO	27
3.1 Rigidez de Membrana	27
3.2 Rigidez à Flexão	32
3.3 Rigidez de Acoplamento Membrana-Flexão	33
3.4 Rigidez ao Cisalhamento Transversal	35
3.5 O Grau de Liberdade μ_z	45
3.6 Rigidez do Elemento no Sistema Local	48
3.7 Rigidez do Elemento no Sistema Global	50
3.8 Travamento de Membrana	54
CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS	57
4.1 Placa Laminada Simétrica	57
4.2 Placa Laminada Anti-Simétrica	60
4.3 Pórtico	63
4.4 Painel Cilíndrico	66
4.5 Casca Cilíndrica	67
4.6 Casca Cilíndrica Laminada	70
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES	71

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73

APÊNDICE A - O AST6S E AS PLACAS DE KIRCHHOFF 77

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Projetistas de estruturas em diferentes ramos da engenharia, na tentativa de atingir uma relação rigidez/peso elevada, têm lançado mão cada vez mais de estruturas laminadas. O baixo módulo de Young do material utilizado como matriz faz o laminado ter um baixo módulo de cisalhamento transversal se comparado com o módulo de Young no plano das lâminas (Jones, 1999).

A importância da deformação de cisalhamento transversal na flexão de placas e cascas está relacionada não só à espessura da estrutura, como também às propriedades do material, ao tipo de carregamento e às condições de contorno. A importância aumenta, por exemplo, em estruturas de material não isotrópico com baixos módulos de cisalhamento transversal, como é o caso dos laminados, e nas proximidades de cargas concentradas. São óbvias, conseqüentemente, as vantagens de elementos ...nitos que levam em consideração o efeito dessa deformação, ainda que numa primeira aproximação como faz a teoria de Reissner-Mindlin (Reissner, 1945; Mindlin, 1951).

A teoria de Reissner-Mindlin, quando usada com o princípio dos deslocamentos virtuais (Reddy, 1997), apresenta os componentes u , v , w do deslocamento da superfície média e os componentes $\bar{\alpha}_x$, $\bar{\alpha}_y$ da rotação da normal a essa superfície como variáveis de campo. O método dos elementos ...nitos requer apenas continuidade C^0 para as variáveis nas interfaces dos elementos usados na discretização do contínuo. Teorias mais refinadas (Reddy, 1984), no que dizem respeito à consideração do efeito da deformação de cisalhamento transversal, incluem outras variáveis de campo além dos componentes de deslocamento e rotação. E mais, essas teorias, assim como a de Kirchhoff, requerem continuidade C^1 para a deflexão w nas interfaces dos elementos.

O termo que inclui o cisalhamento transversal na teoria de Reissner-Mindlin infelizmente traz dificuldades numéricas. O uso da mesma aproximação para a deflexão w e para os componentes $\bar{\alpha}_x$, $\bar{\alpha}_y$ da rotação da normal à superfície média, o que é desejável para manter os nós com os mesmos graus de liberdade, resulta em elemen-

tos com travamento (shear locking), ou seja, excessivamente rígidos, principalmente se polinômios de baixa ordem forem utilizados e a matriz de rigidez for obtida de maneira exata.

O travamento consiste numa amplificação parasita da rigidez em problemas em que a deformação de cisalhamento transversal seja desprezível (Cook et al., 1989; Prathap, 1993; Macneal, 1994). Um elemento com travamento, quando usado no estudo de placas isotrópicas planas, por exemplo, pode conduzir a resultados completamente errôneos se uma malha exageradamente refinada não for utilizada. Se aplicado a placas espessas, o travamento não ocorre ou, pelo menos, não é severo o suficiente para deturpar os resultados dentro de uma discretização não tão refinada.

Vários procedimentos podem ser usados para aliviar, ou mesmo eliminar, o travamento, sendo a integração reduzida da parcela do trabalho virtual interno devido ao cisalhamento transversal o mais conhecido (Zienkiewicz et al., 1971). Entretanto, pode ocorrer que a integração não seja reduzida o suficiente para a remoção do travamento ou seja reduzida em excesso, de forma a permitir a introdução de mecanismos espúrios que venham a comprometer a eficiência do elemento.

Malkus e Hughes (1978) mostram que o uso da integração reduzida é equivalente a uma formulação mista de elementos finitos na qual os componentes de deslocamento, de rotação e de deformação de cisalhamento transversal são as variáveis de campo. Toda a teoria já, então, estabelecida para a formulação mista (Babuska et al., 1975), relacionada inclusive com convergência e estimativa de erro, passa a ser válida para a formulação com a integração reduzida. A equivalência mostra que a integração não é apenas um artifício prático.

Noor e Mathers (1975, 1977), Cheung e Chan (1979), Cheung et al. (1980), e Heppler e Hansen (1986) procuram resolver o problema de travamento utilizando interpolação com polinômios de ordem elevada.

O travamento é eliminado do elemento de placa por Oguamanam et al. (1998) por meio de interpolações denominadas consistentes (Prathap, 1993). Devido às diferentes ordens dos polinômios adotados na aproximação da deflexão w e dos com-

ponentes \bar{u}_x , \bar{u}_y da rotação, os nós apresentam diferentes graus de liberdade dificultando a implementação computacional. Reddy (1993) utiliza esse procedimento no desenvolvimento de um elemento de viga baseado na teoria de Timoshenko e, mais recentemente, Koziey e Mirza (1997) no desenvolvimento de um elemento de casca espessa.

Um outro procedimento disponível, e que é utilizado no presente trabalho, faz uso de uma interpolação criteriosa da deformação de cisalhamento transversal (Hughes e Tezduyar, 1981; MacNeal, 1982; Donea e Lamain, 1987; Bathe et al., 1989; Sze et al., 1997) que permite, igualmente à interpolação com polinômios de ordem elevada e à interpolação consistente, a obtenção da matriz de rigidez a partir de uma integração exata do trabalho virtual interno sem risco de inclusão de mecanismos espúrios.

A procura por um bom elemento de placa/casca tem sido objeto de pesquisa desde os primeiros trabalhos sobre o método dos elementos finitos. A palavra "bom" significa um balanço entre precisão, custo na utilização, facilidade de uso e clareza da formulação. O fator custo, por exemplo, enquanto é importante para problemas lineares, se torna extremamente importante quando se trata de problemas não-lineares: nestes problemas um resultado satisfatório é obtido após várias análises lineares. A síntese estrutural é um outro caso em que várias análises, lineares ou não-lineares, são necessárias na procura de um projeto ótimo.

O elemento triangular é a escolha preferida para a geração automática de malha. Comparados aos elementos quadrilaterais, os elementos triangulares são mais adequados para o modelamento de regiões com geometria irregular, além de permitirem mudança progressiva no seu tamanho sem envolver distorções apreciáveis, qualidade essencial para o uso em análise com refinamento adaptativo.

O elemento triangular de seis nós AST6 (Assumed Strain Triangle - 6 nodes), formulado por Sze et al. (1997) para o estudo da flexão de placas homogêneas e isotrópicas regidas pela teoria de Reissner-Mindlin, é promissor por várias razões: tem geometria triangular; tem os nós com os mesmos graus de liberdade; não apresenta travamento de cisalhamento; passa nos patch tests; não é sensível à distorção; testes numéricos

mostram um excelente desempenho do elemento.

Neste trabalho desenvolvemos um elemento triangular plano de seis nós para placas e cascas laminadas regidas pela teoria de Reissner-Mindlin. Aproximamos os componentes w , $\bar{\epsilon}_x$ e $\bar{\epsilon}_y$ quadraticamente. Em seguida, modificamos as deformações de cisalhamento transversal, conforme Sze et al. (1997), para evitar o travamento associado a essas deformações. Mantemos, assim, no que diz respeito à flexão, as mesmas características do AST6. Os componentes u e v são também aproximados por polinômios quadráticos, o que faz os nós do elemento apresentarem os mesmos graus de liberdade e resultar numa rigidez de membrana similar a do LST (Linear Strain Triangle) de eficiência comprovada (Cook et al., 1989). Quanto à parcela da matriz de rigidez que resulta do acoplamento de rigidez de membrana com de flexão, e cuja ocorrência depende do esquema de laminação, espera-se um bom comportamento pois decorre das mesmas aproximações quadráticas acima mencionadas.

Especialmente na análise de cascas, duas dificuldades ainda persistem: uma decorrente da coplanaridade dos elementos que chegam num nó; a outra decorrente da não coplanaridade. Tenta-se resolver a primeira dificuldade adicionando uma rigidez artificial com relação à rotação normal ao plano do elemento, como sugerido por Zienkiewicz e Taylor (1991). A segunda dificuldade, que está associada à possibilidade de travamento devido ao acoplamento das rigidezes de membrana e de flexão nas interfaces de elementos adjacentes não coplanares (membrane locking), é apenas discutida e exemplificada. O elemento desenvolvido é denominado AST6S (Assumed Strain Triangle - 6 nodes - Shell). A matriz de rigidez é explicitamente obtida, o elemento é de fácil implementação computacional e as aplicações numéricas dão boas indicações do desempenho do elemento.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES BÁSICAS

As equações utilizadas para descrever o comportamento mecânico de uma placa laminada, segundo a teoria de Reissner-Mindlin, são apresentadas neste capítulo, expressando-se a condição de equilíbrio pelo princípio dos deslocamentos virtuais.

2.1 Campo de Deslocamentos

Seja a placa da Fig. 2.1 referida a um sistema retangular xyz de coordenadas cartesianas, com o plano xy situado na superfície média, constituída por N lâminas de espessura constante e perfeitamente solidárias. Denominemos u_x , u_y e u_z os componentes de deslocamento nas direções dos eixos coordenados de um ponto qualquer da placa. A teoria de placas de Reissner-Mindlin (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) utiliza a hipótese que um segmento de reta perpendicular à superfície média da placa indeformada, após a deformação permanece reto, não varia de comprimento, porém não necessariamente permanece perpendicular à essa superfície. O segmento sofre as rotações $\bar{\gamma}_x$ e $\bar{\gamma}_y$ nos planos xz e yz , respectivamente, sendo $\bar{\gamma}_x$ indicada na Fig. 2.1.

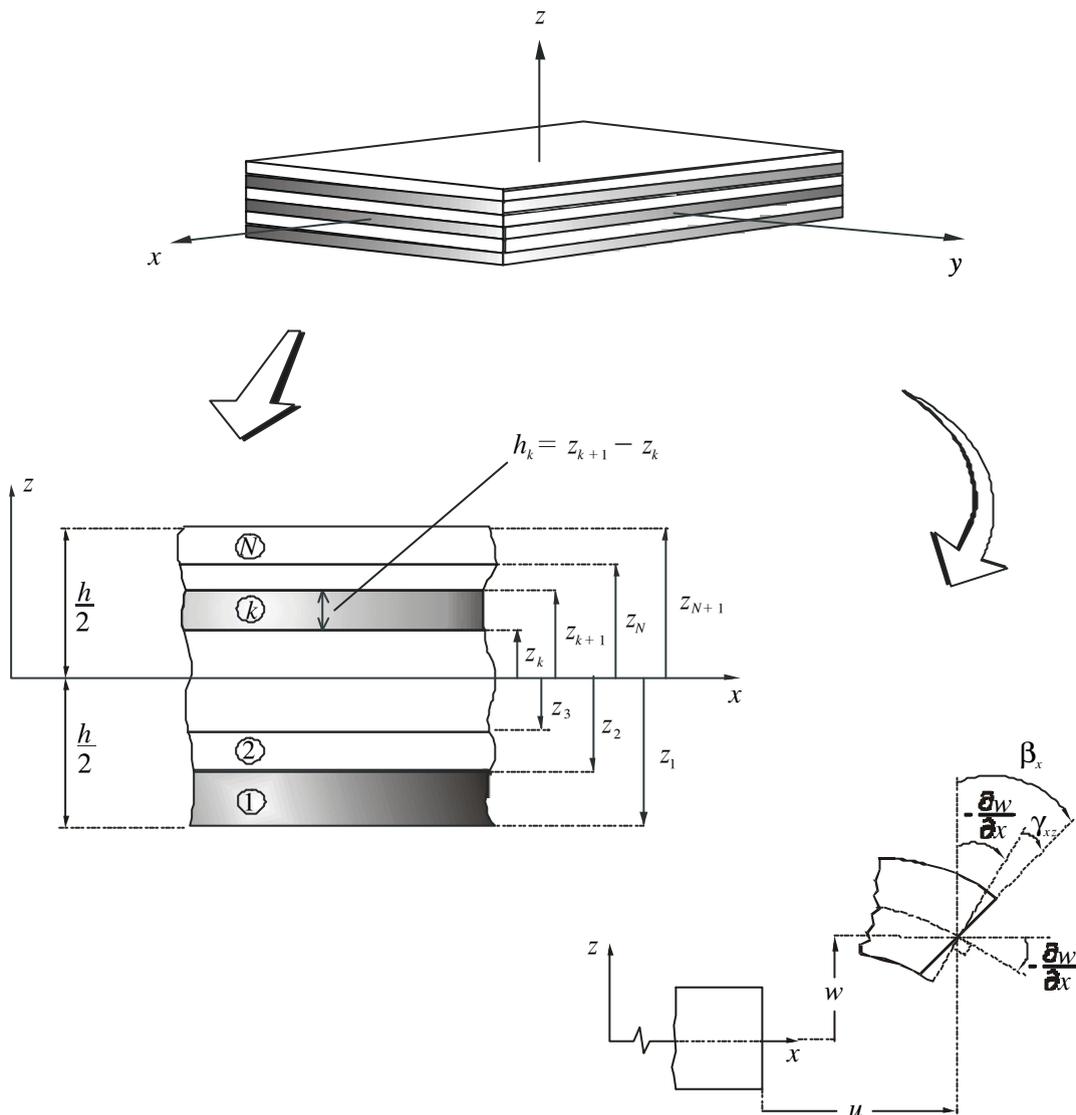


Fig. 2.1 Placa laminada.

Supondo $\bar{\epsilon}_x$ e $\bar{\epsilon}_y$ pequenas, a hipótese acima permite escrever

$$\begin{aligned}
 u_x(x; y; z) &= u(x; y) + z \bar{\epsilon}_x(x; y) \\
 u_y(x; y; z) &= v(x; y) + z \bar{\epsilon}_y(x; y) \\
 u_z(x; y; z) &= w(x; y),
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

onde u, v e w são os deslocamentos u_x , u_y e u_z na superfície média.

2.2 Relações Deformação-Deslocamento

Para pequenos gradientes, em valor absoluto, dos componentes de deslocamento ($\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \dots, \ll 1$),

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} & \epsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Fazendo uso do campo de deslocamento (2.1),

$$\begin{aligned} f^2 g &= \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix} = f^2_m g + z f g \\ f^o g &= \begin{pmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

com $\epsilon_z = 0$ e

$$\begin{aligned} f^2_m g &= \begin{pmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \epsilon_{xy}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} & f g &= \begin{pmatrix} \epsilon_x^g \\ \epsilon_y^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3 Equações Constitutivas

Vamos admitir que as N lâminas que constituem a placa da Fig. 2.1 sejam de material homogêneo, ortotrópico e hiperelástico linear. Para uma lâmina genérica k , mostrada em destaque na Fig. 2.2 com ...bras unidirecionais e com eixos principais do material $x_1 x_2 x_3$ (Reddy, 1997),

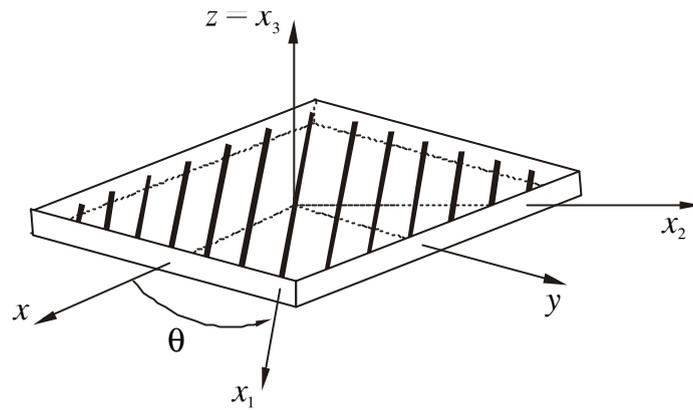


Fig. 2.2 Lâmina com ...bras unidirecionais e eixos principais do material $x_1x_2x_3$.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = [Q_b]^{(k)} \mathbf{f}_b^{(k)} \\
 \begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{Bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} = [Q_s]^{(k)} \mathbf{f}_s^{(k)} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{13} & Q_{66} &= G_{12}. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

A quantidade E_i é o módulo de Young na direção i ; G_{ij} é o módulo de cisalhamento no plano ij ; ν_{ij} é o coeficiente de Poisson definido como a razão $\epsilon_j = \nu_{ij}\epsilon_i$ (num ensaio em que apenas o componente de tensão σ_i é não nulo); e a igualdade $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$ estabelece a dependência existente entre E_1 , E_2 , ν_{12} e ν_{21} . A nomenclatura adotada para Q_{ij} é a mesma da literatura sobre placas laminadas.

O sistema $x_1x_2x_3$ é obtido de xyz por uma rotação μ do plano xy , no sentido anti-horário, em torno do eixo $z = x_3$. Os componentes de deformação nos dois sistemas mantêm as seguintes relações:

$$\mathbf{f}_b^{(k)} = [T_1]^{(k)} \mathbf{f}_b^g \quad \mathbf{f}_s^{(k)} = [T_2]^{(k)} \mathbf{f}_s^g \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
 [T_1]^{(k)} &= \begin{bmatrix} \cos^2 \mu & \sin^2 \mu & \sin \mu \cos \mu \\ \sin^2 \mu & \cos^2 \mu & -\sin \mu \cos \mu \\ 2 \sin \mu \cos \mu & -2 \sin \mu \cos \mu & \cos^2 \mu - \sin^2 \mu \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \\
 [T_2]^{(k)} &= \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para os correspondentes componentes de tensão,

$$\bar{\sigma}_1^{(k)} = [T_1]^{(k)T} \sigma_{11}^{(k)} \quad \bar{\sigma}_2^{(k)} = [T_2]^{(k)T} \sigma_{22}^{(k)} :$$

As equações constitutivas da lâmina no sistema xyz podem ser obtidas de (2.5), (2.7) e (2.9):

$$\bar{\sigma}_1^{(k)} = \bar{Q}_b^{(k)} \bar{\epsilon}_1^{(k)} \quad \bar{\sigma}_2^{(k)} = \bar{Q}_s^{(k)} \bar{\epsilon}_2^{(k)} \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_b^{(k)} &= [T_1]^{(k)T} [Q_b]^{(k)} [T_1]^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \\
 \bar{Q}_s^{(k)} &= [T_2]^{(k)T} [Q_s]^{(k)} [T_2]^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Os coeficientes \bar{Q}_{ij} podem facilmente ser explicitados:

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \mu + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \mu \cos^2 \mu + Q_{22} \sin^4 \mu \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \mu \cos^2 \mu + Q_{12} (\sin^4 \mu + \cos^4 \mu) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \mu \cos^3 \mu + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \mu \cos \mu \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \mu + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \mu \cos^2 \mu + Q_{22} \cos^4 \mu \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \mu \cos \mu + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \mu \cos^3 \mu \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \mu \cos^2 \mu + Q_{66} (\sin^4 \mu + \cos^4 \mu) \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \mu + Q_{55} \sin^2 \mu \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \mu \cos \mu \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \mu + Q_{55} \cos^2 \mu.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

A partir da definição

$$\begin{aligned}
 fNg &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} dz \\
 fMg &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\
 fQg &= \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} dz,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

as equações constitutivas que envolvem os esforços N_x , N_y , etc., podem ser estabelecidas. Embora os componentes de deformação (2.3) sejam contínuos ao longo da espessura, os componentes de tensão (2.10) não são, em geral, contínuos devido à mudança de material quando se passa de uma lâmina para outra. Conseqüente-

mente, as integrações (2.13) devem ser efetuadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^2 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2^m_x + z x \\ 2^m_y + z y \\ 0^m_{xy} + z xy \end{Bmatrix} dz \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2^m_x \\ 2^m_y \\ 0^m_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ xy \end{Bmatrix} \\
 \\
 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^2 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2^m_x + z x \\ 2^m_y + z y \\ 0^m_{xy} + z xy \end{Bmatrix} z dz \\
 &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2^m_x \\ 2^m_y \\ 0^m_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ xy \end{Bmatrix} \\
 \\
 \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^2 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} k_{55} \bar{Q}_{55} & k_{45} \bar{Q}_{45} \\ k_{45} \bar{Q}_{45} & k_{44} \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0_{xz} \\ 0_{yz} \end{Bmatrix} dz \\
 &= \begin{bmatrix} G_{55} & G_{45} \\ G_{45} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0_{xz} \\ 0_{yz} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Os fatores de correção k_{ij} são introduzidos para se levar em conta a variação em z das tensões de cisalhamento transversal. Os fatores dependem do material de cada lâmina e do esquema de laminação, sendo normalmente admitidos iguais a 5=6 para placas homogêneas. A precisão dos resultados depende da correta escolha desses fatores (Whitney, 1973; Noor e Burton, 1989; Chun e Dong, 1992; Dong e Chun, 1992). Numa forma compacta, as expressões (2.14) se escrevem

$$\begin{Bmatrix} fNg \\ fMg \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f^2_m g \\ f g \end{Bmatrix} \quad fQg = [G] f^0 g \tag{2.15}$$

Os parâmetros de rigidez de membrana A_{ij} , de flexão D_{ij} e de acoplamento membrana-flexão B_{ij} são dados por

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \mathbf{i}_1, z, z^2 dz \quad (2.16)$$

ou

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) & B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) & i, j &= 1, 2, 6. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Observe que $B_{ij} = 0$ se a placa for simétrica em relação à superfície média. Os parâmetros de rigidez ao cisalhamento transversal G_{ij} são dados por

$$\begin{aligned} G_{ij} &= k_{ij} \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ &= k_{ij} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad i, j = 4, 5. \quad (2.18)$$

2.4 Princípio dos Deslocamentos Virtuais

No equilíbrio

$$\delta W_i + \delta W_e = 0. \quad (2.19)$$

A expressão do trabalho virtual das forças internas é dada por

$$\delta W_i = \int_V (\frac{1}{2} \sigma_x \delta \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \delta \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \epsilon_{xy} + \tau_{xz} \delta \epsilon_{xz} + \tau_{yz} \delta \epsilon_{yz}) dx dy dz. \quad (2.20)$$

A deformação virtual é determinada do deslocamento virtual da mesma maneira que a deformação real é determinada do deslocamento real. Portanto, substituindo $\delta \epsilon_z = 0$ e (2.3) em (2.20), e integrando em z de $-h/2$ a $h/2$ levando-se em conta (2.13),

$$\delta W_i = \int_A \left(\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right)^T \left(\begin{matrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{matrix} \right) dx dy = \int_A \left(\begin{matrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{matrix} \right)^T \left(\begin{matrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{matrix} \right) dx dy + \int_A \left(\begin{matrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right)^T \left(\begin{matrix} \delta u \\ \delta v \end{matrix} \right) dx dy. \quad (2.21)$$

Das equações constitutivas (2.15),

$$\begin{aligned}
 \delta W_i &= \int_V \left(\delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} \right) dx dy \\
 &= \int_V \left(\delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} + \delta \mathbf{f}^T \mathbf{g} \right) dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

A expressão do trabalho virtual das forças externas δW_e dependerá do carregamento aplicado.

CAPÍTULO 3

ELEMENTO FINITO

Os componentes do deslocamento da superfície média e as da rotação da normal a essa superfície são aproximados por polinômios quadráticos de forma a se ter continuidade C^0 nas interfaces dos elementos, como requer a teoria de Reissner-Mindlin, e manter todos os nós com os mesmos graus de liberdade. A decorrente variação quadrática dos componentes da deformação de cisalhamento transversal são criteriosamente ajustados para uma variação linear com o objetivo de se eliminar o travamento a eles associado. A matriz de rigidez do elemento triangular plano de seis nós é obtida sem uso de integração numérica e apresentada em cinco parcelas. A última delas refere-se a uma rigidez artificial incorporada à rotação normal ao plano do elemento tal que permita sua aplicação à análise de cascas. A possibilidade de travamento devido ao acoplamento das rigidezes de membrana e de flexão nas interfaces de elementos não coplanares é discutida.

3.1 Rigidez de Membrana

Adotemos o sistema de coordenadas xyz de modo que x coincida com o lado 12 do elemento (Fig. 3.1). Um ponto P qualquer no interior do elemento divide a área $A = x_2y_3/2$ em três triângulos menores de área A_1 , A_2 e A_3 . O ponto P pode ser definido pelas coordenadas

$$\eta = \frac{A_2}{A} \quad \zeta = \frac{A_3}{A}. \quad (3.1)$$

Pode-se mostrar que

$$\eta = \frac{y_3x_1 - x_3y_1}{2A} \quad \zeta = \frac{x_2y_1}{2A} \quad (3.2)$$

A mudança do plano xy para $\eta\zeta$ transforma o triângulo com vértices $(0;0)$, $(x_2;0)$ e $(x_3;y_3)$ para o triângulo retângulo com vértices $(0;0)$, $(1;0)$ e $(0;1)$.

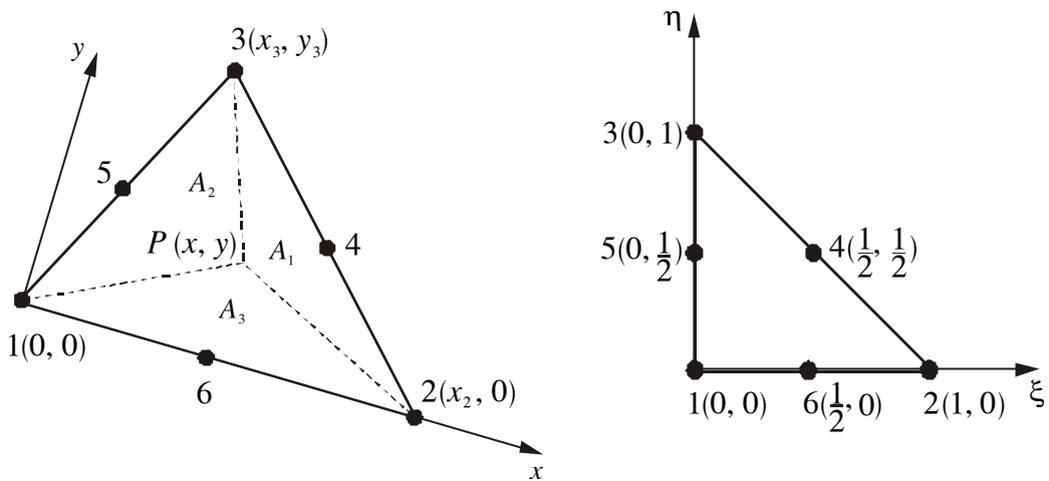


Fig. 3.1 Elemento nos planos xy e $\xi\eta$.

Adotando-se uma aproximação quadrática para os componentes u e v ,

$$u = fN_g^T f\bar{u}_g \quad v = fN_g^T f\bar{v}_g \quad (3.3)$$

no qual

$$fN_g = \begin{bmatrix} 2(1-\xi)(1-\eta) \\ \xi(2-\eta) \\ \eta(2-\xi) \\ 4\xi\eta \\ 4\xi(1-\eta) \\ 4\eta(1-\xi) \end{bmatrix} \quad f\bar{u}_g = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad f\bar{v}_g = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

De (2.4), (3.2) e (3.3),

$$f^2_{mg} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 u_{1,2} \\ \xi x_3 v_{1,2} + x_2 v_{1,3} \\ \xi x_3 u_{1,2} + x_2 u_{1,3} + y_3 v_{1,2} \end{bmatrix} = [B_m] f d_{mg} \quad (3.5)$$

onde $(\cdot)_{,j} = \partial(\cdot)/\partial x_j$ e

$$[B_m]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3(j_3 + 4j_4 + 4j_1) & 0 & x_{23}(j_3 + 4j_4 + 4j_1) \\ 0 & x_{23}(j_3 + 4j_4 + 4j_1) & y_3(j_3 + 4j_4 + 4j_1) \\ y_3(4j_2 - j_1) & 0 & -j_1 x_3(4j_2 - j_1) \\ 0 & -j_1 x_3(4j_2 - j_1) & y_3(4j_2 - j_1) \\ 0 & 0 & x_2(4j_1 - j_1) \\ 0 & x_2(4j_1 - j_1) & 0 \\ 4y_3j_1 & 0 & 4(x_2j_2 - j_1 x_3j_1) \\ 0 & 4(x_2j_2 - j_1 x_3j_1) & 4y_3j_1 \\ -j_1 4y_3j_1 & 0 & 4[x_3j_1 + x_2(j_1 - j_2j_1)] \\ 0 & 4[x_3j_1 + x_2(j_1 - j_2j_1)] & -j_1 4y_3j_1 \\ 4y_3(j_1 - 2j_2 - j_1) & 0 & -j_1 4[x_2j_2 + x_3(j_1 - 2j_2 - j_1)] \\ 0 & -j_1 4[x_2j_2 + x_3(j_1 - 2j_2 - j_1)] & 4y_3(j_1 - 2j_2 - j_1) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$$

$$f d_m g^T = b \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \end{bmatrix}^T \quad (3.6)$$

com $x_{ij} = x_i - x_j$.

É possível fazer a decomposição

$$[B_m] = \frac{1}{2A} [L][L^0], \quad (3.7)$$

no qual

$$[L] = \begin{bmatrix} f_1 g^T & f_0 g^T & f_0 g^T \\ f_0 g^T & f_1 g^T & f_0 g^T \\ f_0 g^T & f_0 g^T & f_1 g^T \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \quad f_1 g = \begin{bmatrix} 1 & j_1 - j_2 \\ 0 & j_1 \\ 0 & j_1 \end{bmatrix} \quad f_0 g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \quad (3.8)$$

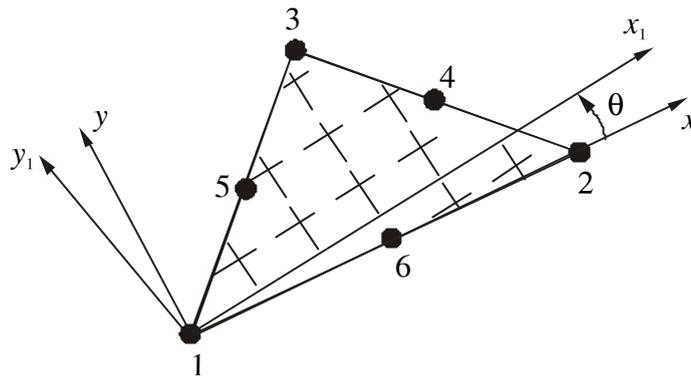


Fig. 3.2 Sistema local xyz e do material $x_1y_1z_1$.

$$\begin{aligned}
 [K_m] &= \frac{1}{2A} [L]^T [A] [L] d' d \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^T [A] [L] d' d \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^T [F_m] [L]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
 [F_m] &= [L]^T [A] [L] d' d \\
 &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}[R_m] & A_{12}[R_m] & A_{16}[R_m] \\ A_{22}[R_m] & A_{26}[R_m] \\ & A_{66}[R_m] \end{bmatrix} \\
 [R_m] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A orientação dos eixos principais do material $x_1y_1z_1$, que é importante na determinação de $[A]$, é definida em relação ao sistema local xyz como indicado na Fig. 3.2.

Utilizando (3.7) e (3.12),

$$\begin{aligned}
 [K_b] &= \int_{\Omega} [B_m]^T [D] [B_m] dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2A} [L]^{(e)} [D] \frac{1}{2A} [L]^{(e)} 2A d' d \rangle \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^{(e)T} [L]^T [D] [L] d' d \rangle [L]^{(e)} \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^{(e)T} [F_b] [L]^{(e)} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 [F_b] &= [L]^T [D] [L] d' d \rangle \\
 &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} D_{11}[R_m] & D_{12}[R_m] & D_{16}[R_m] \\ D_{22}[R_m] & D_{26}[R_m] & D_{66}[R_m] \end{bmatrix} \quad (3.21) \\
 &\quad \text{sim.}
 \end{aligned}$$

3.3 Rigidez de Acoplamento Membrana-Flexão

De (2.22), (3.5) e (3.17),

$$\begin{aligned}
 f_{\pm 2mg}^T [B] f_g dx dy &= \int_{\Omega} ([B_m] f_{\pm d_m g})^T [B] ([B_m] f_{d_b g}) dx dy \\
 &= \int_{\Omega} f_{\pm d_m g}^T [B_m]^T [B] [B_m] f_{d_b g} dx dy \\
 &= \int_{\Omega} f_{\pm d_m g}^T [K_{mb}] f_{d_b g} dx dy \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Utilizando (3.7) e (3.12),

$$\begin{aligned}
 [K_{mb}] &= \int_{\Omega} [B_m]^T [B] [B_m] dx dy \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2A} [L]^{(e)} [B] \frac{1}{2A} [L]^{(e)} 2A d' d \rangle \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^{(e)T} [L]^T [B] [L] d' d \rangle [L]^{(e)} \\
 &= \frac{1}{2A} [L]^{(e)T} [F_{mb}] [L]^{(e)} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 [F_{mb}] &= \int_{\Omega} [L]^T [B] [L] d\Omega \\
 &= \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}[R_m] & B_{12}[R_m] & B_{16}[R_m] \\ B_{22}[R_m] & B_{26}[R_m] & \\ \text{sim.} & & B_{66}[R_m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$\int_{\Omega} f_{\pm}^T [B] f_{mg}^2 dx dy = \sum_{i=1}^6 f_{\pm d_b} g^T [K_{bm}] f_{d_{mg}} \quad (3.25)$$

onde

$$[K_{bm}] = [K_{mb}]. \quad (3.26)$$

3.4 Rigidez ao Cisalhamento Transversal

Igualmente às demais variáveis, a deflexão w é aproximada pelo polinômio quadrático

$$w = \mathbf{fN} \mathbf{g}^T \mathbf{f} \mathbf{w} \mathbf{g} \quad (3.27)$$

onde $\mathbf{fN} \mathbf{g}$ é dado em (3.4) e

$$\mathbf{f} \mathbf{w} \mathbf{g}^T = \mathbf{b} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{bmatrix} \mathbf{c}. \quad (3.28)$$

O uso da mesma aproximação para w e para \bar{u}_x, \bar{u}_y traz dificuldades numéricas relacionadas à deformação de cisalhamento transversal. Para entender melhor o fenômeno, vamos escrever as aproximações na forma

$$\begin{aligned} w &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \\ \bar{u}_x &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 \\ \bar{u}_y &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De (2.3) e (3.29),

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= (a_1 + b_0) + (2a_3 + b_1)x + (a_4 + b_2)y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 \\ \sigma_{yz} &= (a_2 + c_0) + (a_4 + c_1)x + (2a_5 + c_2)y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Se o elemento é aplicado a um problema em que $\sigma_{xz}, \sigma_{yz} \neq 0$ para qualquer valor de x e y , então

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_0 & 2a_3 &= -b_1 & a_4 &= -b_2 \\ a_2 &= -c_0 & a_4 &= -c_1 & 2a_5 &= -c_2 \\ b_3, b_4, b_5, c_3, c_4, c_5 &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

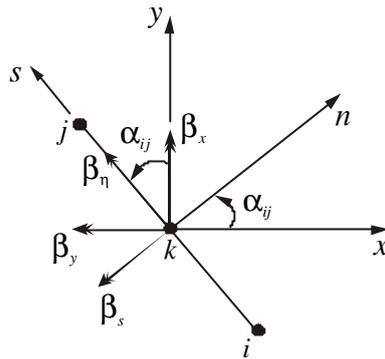


Fig. 3.3 Rotações.

A situação $b_3, b_4, b_5, c_3, c_4, c_5 \neq 0$ é indesejável, pois \bar{x} e \bar{y} passam efetivamente a ser aproximados por um polinômio linear, tornando f g , que era linear, constante. Isto constitui-se num travamento, num enrijecimento do elemento à flexão provocado exclusivamente pelo cisalhamento transversal. Se w fosse aproximado por um polinômio cúbico, todas as parcelas de $^{\circ}_{xz}$ e $^{\circ}_{yz}$ em (3.30) teriam, respectivamente, contribuição de ambos w, \bar{x} e w, \bar{y} , evitando-se o fenômeno. Essa maneira de interpolar é dita consistente (Prathap, 1993), porém dispendiosa a implementação computacional por causa dos diferentes graus de liberdade apresentados pelos nós. Se a aproximação quadrática for mantida para w , é preciso modificar $^{\circ}_{xz}$ e $^{\circ}_{yz}$. Adotaremos o que é proposto por Sze et al. (1997) que ajusta, criteriosamente, a variação quadrática de $^{\circ}_{xz}$ e $^{\circ}_{yz}$ a uma variação linear. Seja um segmento de reta que liga os nós i e j , com ponto médio k , mostrado na Fig. 3.3. Podemos escrever

$$\bar{s} = i \bar{x} \sin \alpha_{ij} + \bar{y} \cos \alpha_{ij} \quad (3.32)$$

onde

$$\cos \alpha_{ij} = i \frac{y_{ij}}{l_{ij}} \quad \sin \alpha_{ij} = \frac{x_{ij}}{l_{ij}} \quad l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}. \quad (3.33)$$

A deformação de cisalhamento no plano sz é dada por

$$\gamma_{sz} = w_{,s} + \bar{v}_{,s} \quad (3.34)$$

Sabendo-se da variação quadrática de w e \bar{v} , tem-se ao longo do segmento

$$\begin{aligned} w &= 2 \frac{\mu}{l_{ij}} s \left(\frac{1}{2} w_i + \frac{1}{2} w_j \right) + \frac{\mu}{l_{ij}} s^2 \left(\frac{1}{2} w_i + \frac{1}{2} w_j \right) \\ \bar{v}_s &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (w_j - w_i) \sin \theta_{ij} \\ \frac{1}{2} (w_j + w_i) \cos \theta_{ij} \\ \frac{1}{2} (w_k - w_i) \sin \theta_{ik} \\ \frac{1}{2} (w_k + w_i) \cos \theta_{ik} \\ \frac{1}{2} (w_k - w_j) \sin \theta_{jk} \\ \frac{1}{2} (w_k + w_j) \cos \theta_{jk} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde o eixo coordenado s tem origem em i. A deformação média ao longo do segmento ij vale

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_k &= \frac{1}{l_{ij}} \int_0^{l_{ij}} (w_{,s} + \bar{v}_{,s}) ds \\ &= \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (w_j - w_i) \sin \theta_{ij} \\ (w_j + w_i) \cos \theta_{ij} \\ (w_k - w_i) \sin \theta_{ik} \\ (w_k + w_i) \cos \theta_{ik} \\ (w_k - w_j) \sin \theta_{jk} \\ (w_k + w_j) \cos \theta_{jk} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Para os três lados do elemento, com o sentido crescente de s indicado na Fig. 3.4,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_4 &= \frac{w_3 - w_2}{l_{23}} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (w_3 - w_2) \sin \theta_{23} \\ (w_3 + w_2) \cos \theta_{23} \\ (w_4 - w_2) \sin \theta_{24} \\ (w_4 + w_2) \cos \theta_{24} \\ (w_4 - w_3) \sin \theta_{34} \\ (w_4 + w_3) \cos \theta_{34} \end{pmatrix} \\ \bar{\gamma}_5 &= \frac{w_1 - w_3}{l_{31}} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (w_1 - w_3) \sin \theta_{31} \\ (w_1 + w_3) \cos \theta_{31} \\ (w_5 - w_3) \sin \theta_{35} \\ (w_5 + w_3) \cos \theta_{35} \\ (w_5 - w_1) \sin \theta_{15} \\ (w_5 + w_1) \cos \theta_{15} \end{pmatrix} \\ \bar{\gamma}_6 &= \frac{w_2 - w_1}{l_{12}} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (w_2 - w_1) \sin \theta_{12} \\ (w_2 + w_1) \cos \theta_{12} \\ (w_6 - w_1) \sin \theta_{16} \\ (w_6 + w_1) \cos \theta_{16} \\ (w_6 - w_2) \sin \theta_{26} \\ (w_6 + w_2) \cos \theta_{26} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por um procedimento similar, determinam-se

$$\begin{aligned}
 q_b &= \frac{w_2 \text{ i } w_5}{l_{52}} + \frac{1}{12} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ sen}^{\textcircled{R}}_{52} = \begin{matrix} \mathbf{9} \text{ T } \mathbf{8} \\ \text{cos}^{\textcircled{R}}_{52} \end{matrix} \right\rangle ; \left\langle \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ }^{-x_1} + 2 \text{ }^{-x_2} \text{ i } \text{ }^{-x_3} + 4(\text{ }^{-x_4} + \text{ }^{-x_5} + \text{ }^{-x_6}) = \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ }^{-y_1} + 2 \text{ }^{-y_2} \text{ i } \text{ }^{-y_3} + 4(\text{ }^{-y_4} + \text{ }^{-y_5} + \text{ }^{-y_6}) \right\rangle ; \\
 q_c &= \frac{w_3 \text{ i } w_6}{l_{63}} + \frac{1}{12} \left\langle \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ sen}^{\textcircled{R}}_{63} = \begin{matrix} \mathbf{9} \text{ T } \mathbf{8} \\ \text{cos}^{\textcircled{R}}_{63} \end{matrix} \right\rangle ; \left\langle \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ }^{-x_1} \text{ i } \text{ }^{-x_2} + 2 \text{ }^{-x_3} + 4(\text{ }^{-x_4} + \text{ }^{-x_5} + \text{ }^{-x_6}) = \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \text{i} \end{matrix} \text{ }^{-y_1} \text{ i } \text{ }^{-y_2} + 2 \text{ }^{-y_3} + 4(\text{ }^{-y_4} + \text{ }^{-y_5} + \text{ }^{-y_6}) \right\rangle .
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

Rearranjando as equações (3.37), (3.40) e (3.41) em forma matricial e usando a notação $S_{ij} = \text{sen}^{\textcircled{R}}_{ij}$ e $C_{ij} = \text{cos}^{\textcircled{R}}_{ij}$,

$$\mathbf{f}^{\circ} \text{ M g} = [\mathbf{F}_{M_1}] \mathbf{f} \text{ d}_{sg} \tag{3.42}$$

Finalmente, tem-se para (3.44)

$$f^q g = [H][F_{M_2}]^i [F_{M_1}] f_{d_s} g. \quad (3.57)$$

Duas observações são oportunas com relação à q_4, q_5, q_6, q_a, q_b e q_c :

² são em número exato, conforme (3.44) e (3.55), para uma interpolação linear da deformação média de cisalhamento transversal $f^q g$;

² são nulas, e portanto $f^q g = f_0 g$, para w, \bar{u}_x e \bar{u}_y compatível com uma distribuição linear de momentos $f M g$ segundo a teoria de placas de Kirchhoff (Apêndice A.). Isto explica a ausência de travamento de cisalhamento transversal na aplicação do elemento em placas ...nas.

Adotando-se, assim, para a deformação de cisalhamento transversal o campo linear (3.57), tem-se de (2.22)

ZZ

$$\begin{aligned} & f_{\pm}^{\circ} g^T [G] f^{\circ} g \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathcal{X}^e} \int_{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^i [H][F_{M_2}]^i [F_{M_1}] f_{\pm} d_s g \, \zeta^T [G] \sum_{i=1}^i [H][F_{M_2}]^i [F_{M_1}] f_{d_s} g \, \zeta \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathcal{X}^e} \int_{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^i f_{\pm} d_s g^T [F_{M_1}]^T [F_{M_2}]^i [H]^T [G] [H] [F_{M_2}]^i [F_{M_1}] f_{d_s} g \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathcal{X}^e} \sum_{i=1}^i f_{\pm} d_s g^T [K_s] f_{d_s} g \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$[K_s] = [F_{M_1}]^T [F_{M_2}]^i [F_s] [F_{M_2}]^i [F_{M_1}], \quad (3.59)$$

com

$$\begin{aligned}
 [F_s] &= \int_{Z_1}^{Z_2} [H]^T [G] [H] dx dy \\
 &= 2A \int_{Z_1}^{Z_2} [H]^T [G] [H] dz \\
 &= 2A \begin{bmatrix} G_{55}[R_s] & G_{45}[R_s] \\ \text{sim.} & G_{44}[R_s] \end{bmatrix} \\
 [R_s] &= \begin{bmatrix} 6 & 1=6 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & & 1=6 & 0 & 7 \\ 4 & & & 1=6 & 5 \\ \text{sim.} & & & & 1=6 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

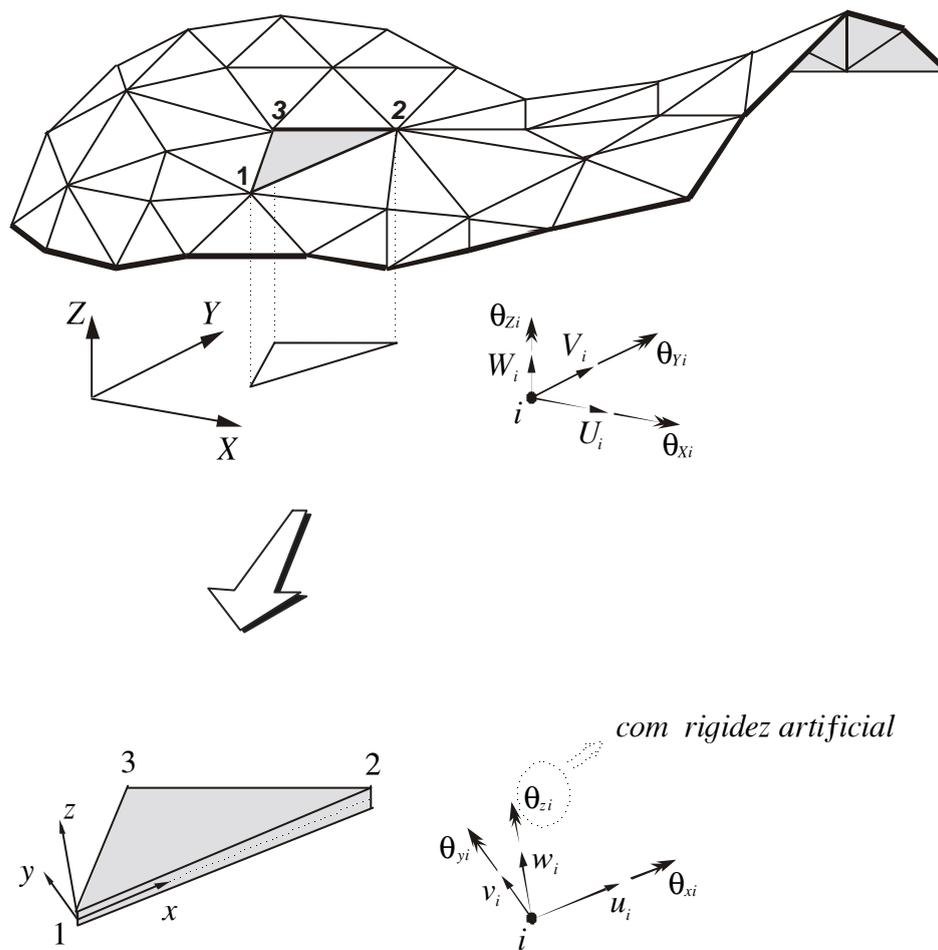


Fig. 3.5 Discretização de uma casca em elementos triangulares.

3.5 O Grau de Liberdade μ_z

A Fig. 3.5 mostra uma casca discretizada em elementos triangulares. Cada nó apresenta seis graus de liberdade no sistema global XYZ , enquanto que apenas cinco no sistema local xyz . Quando as contribuições dos elementos são combinadas em um dado nó no sistema global, surgem seis equações independentes se os elementos que chegam no nó não são todos coplanares; caso contrário, uma das equações é uma combinação linear das outras cinco. Noutras palavras, naquele nó a rigidez à rotação em torno da normal ao plano formado pelos elementos é nula. Este fato explica as dificuldades numéricas relacionadas com a singularidade, ou a quase singularidade, da matriz de rigidez da estrutura decorrente da coplanaridade, ou da quase coplanaridade, dos elementos que chegam em um nó. A geometria da casca e o grau de refinamento da malha influenciam a coplanaridade. Para contornar es-

$$\begin{aligned}
\mu_z &= \frac{1}{A} \int \mu_z dx dy \\
&= \frac{1}{A} \int \int \mu_z dx dy \\
&= \frac{1}{3} (\mu_{z4} + \mu_{z5} + \mu_{z6}) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{z1} \\ \mu_{z2} \\ \mu_{z3} \\ \mu_{z4} \\ \mu_{z5} \\ \mu_{z6} \end{bmatrix} \\
&= fN^T g f d_\mu g. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.63) e (3.65) em (3.61), e redefinindo θ como 90° a título de simplificação,

$$\pm W_i^\alpha = \pm W_{ij} f \pm d_\mu g^T [K_\mu] f d_\mu g \tag{3.66}$$

onde

$$\begin{aligned}
[K_\mu] &= 180 \int \int \begin{bmatrix} i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \end{bmatrix} dx dy \\
&= 180 \int \int \begin{bmatrix} i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \\ fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i & fN g_i \end{bmatrix} 2A d' d \\
&= \theta^{-A} \begin{bmatrix} 6 & i & 1 & i & 1 & i & 4 & 0 & 0 \\ 6 & i & 1 & 0 & i & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & i & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & i & 4 & i & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & i & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

O valor ideal para θ faria $[K_\mu]$ eliminar a singularidade associada à coplanaridade dos elementos em torno de um nó, ao mesmo tempo em que não interferiria nos resultados.

3.6 Rigidez do elemento no sistema local

A matriz de rigidez do elemento apresenta cinco parcelas: $[K_m]$, $[K_b]$, $[K_{mb}] = [K_{bm}]$, $[K_s]$ e $[K_\mu]$. Sze et al. (1997) e Rosa (1999) testam $[K_b] + [K_s]$ em problemas de flexão de placas homogêneas, concluindo ser a matriz, possivelmente, a mais eficiente para um elemento triangular de seis nós regido pela teoria de Reissner-Mindlin. A parcela $[K_m]$ nada mais é do que a rigidez do famoso elemento de membrana LST (Linear Strain Triangle) de eficiência comprovada (Cook et al. 1989). É de se esperar que as matrizes de acoplamento $[K_{mb}] = [K_{bm}]$, cuja derivação decorre das mesmas aproximações que geram $[K_m]$ e $[K_b]$, dêem boas contribuições. Apesar de $[K_\mu]$ não ter sido encontrada na literatura pelo autor, é concebida a partir de um procedimento aceito pelos projetistas de elementos planos para aplicação em cascas. Adicionemos, agora, as cinco parcelas para obter a matriz de rigidez $[K^0]$ do elemento. Lembramos que $[K_m]$ é ordenada segundo $fd_m g$; $[K_b]$ segundo $fd_b g$; e assim por diante. Vamos ordenar $[K^0]$ segundo os graus de liberdade

$$fd^0 g^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & \mu_{z1} & \dots & u_6 & v_6 & w_6 & \bar{x}_6 & \bar{y}_6 & \mu_{z6} \end{bmatrix} C, \quad (3.68)$$

resultando para o trabalho virtual das forças internas

$$\delta W_i = \int_{\mathcal{X}^e} f_i^0 d^0 g^T [K^0] f_i^0 d^0 g. \quad (3.69)$$

O uso de \bar{x} como sendo a rotação da normal à superfície média no plano xz e \bar{y} a rotação no plano yz , é comum na literatura sobre a teoria de Reissner-Mindlin, mas pode ser confuso para os usuários de elementos finitos. É mais conveniente utilizar uma notação para as rotações que obedeça a regra da mão de direita. Se μ_x e μ_y são as rotações da normal em torno dos eixos x e y , respectivamente (Fig. 3.6), então

$$\bar{x} = \mu_y \quad \bar{y} = \mu_x. \quad (3.70)$$

Para um nó genérico i ,

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} 2 \\ \vdots \\ 6 \\ \vdots \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} [T_3] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & [T_3] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & [T_3] & [0] & [0] & [0] \\ & & & [T_3] & [0] & [0] \\ \text{sim.} & & & & [T_3] & [0] \\ & & & & & [T_3] \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 5 \end{matrix} \text{fdg} \\
 = [T_4] \text{fdg} \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

com

$$\text{fdg}^T = \begin{matrix} b & u_1 & v_1 & w_1 & \mu_{x1} & \mu_{y1} & \mu_{z1} & \dots & u_6 & v_6 & w_6 & \mu_{x6} & \mu_{y6} & \mu_{z6} & c. \end{matrix} \tag{3.74}$$

Podemos reescrever (3.69) na forma

$$\begin{aligned}
 \pm W_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^e ([T_4] \text{f}_{\pm dg})^T [K^0] ([T_4] \text{fdg}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^e \text{f}_{\pm dg}^T [T_4]^T [K^0] [T_4] \text{fdg} \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^e \text{f}_{\pm dg}^T [K] \text{fdg} \tag{3.75}
 \end{aligned}$$

onde, ...nalmente,

$$[K] = [T_4]^T [K^0] [T_4] \tag{3.76}$$

é a matriz de rigidez do elemento ordenada segundo fdg. A Fig. 3.7 mostra o elemento no sistema local de eixos com todos os graus de liberdade.

3.7 Rigidez do Elemento no Sistema Global

Consideremos o sistema local xyz e global XYZ representados juntos na Fig. 3.8. Os componentes do vetor deslocamento fdg no sistema xyz são dados por b u v w c e no sistema XYZ por b U V W c. Vamos mostrar como esses componentes relacionam-se nos dois sistemas de eixos.

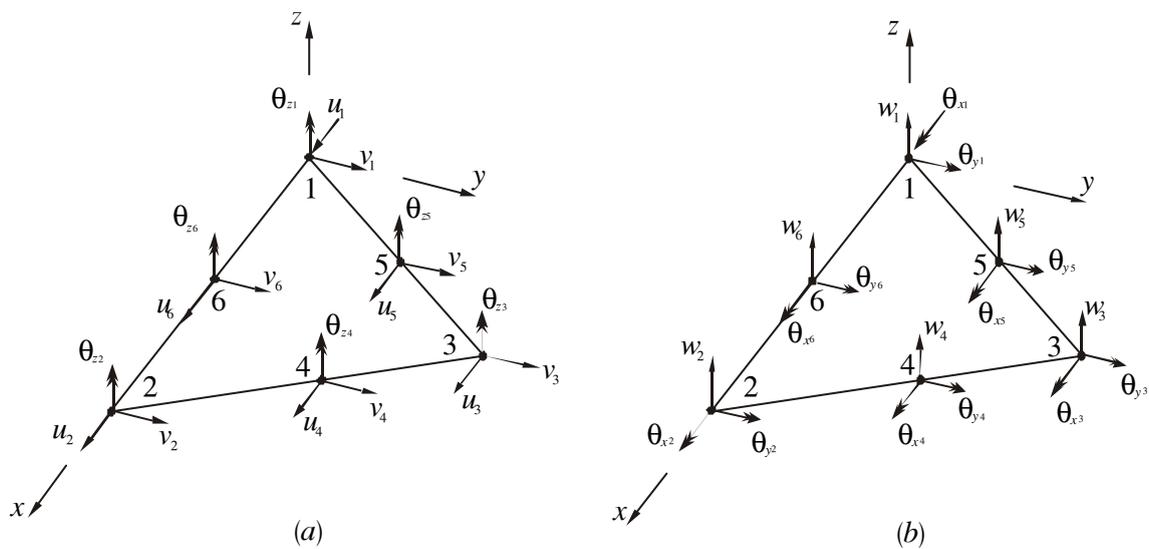


Fig. 3.7 Elemento no sistema local xyz , com os graus de liberdade associados à (a) membrana (μ_{zi} tem rigidez artificial); (b) feixe.

Sejam C_{xX} o co-seno do ângulo entre os eixos x e X , C_{xY} o co-seno do ângulo entre os eixos x e Y , e assim por diante. Então,

$$\begin{aligned} u &= C_{xX}U + C_{xY}V + C_{xZ}W \\ v &= C_{yX}U + C_{yY}V + C_{yZ}W \\ w &= C_{zX}U + C_{zY}V + C_{zZ}W. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [I] \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

onde

$$[I] = \begin{bmatrix} C_{xX} & C_{xY} & C_{xZ} \\ C_{yX} & C_{yY} & C_{yZ} \\ C_{zX} & C_{zY} & C_{zZ} \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

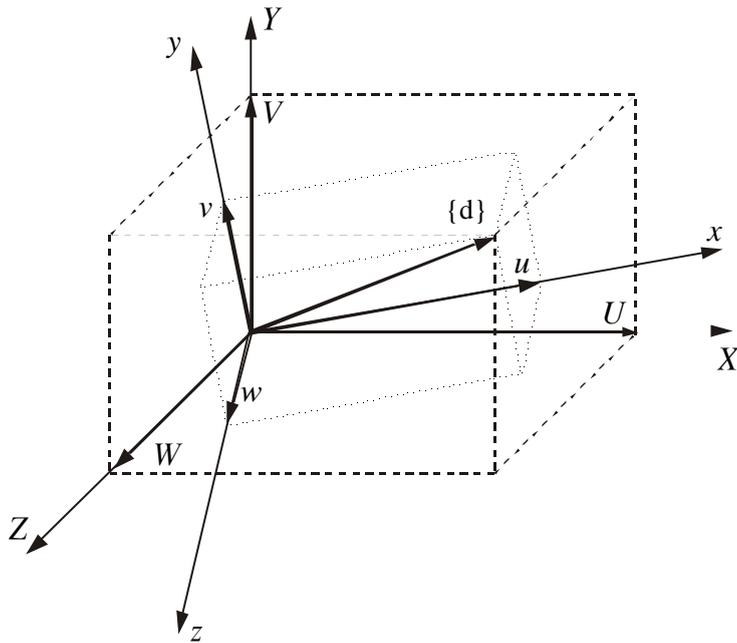


Fig. 3.8 Componentes do vetor fdg nos sistemas local xyz e global XY Z.

Da definição de [I], fica claro que

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = [I]^T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Nada mudaria na matriz de rotação [I] se o vetor deslocamento fdg fosse substituído por outro vetor. Por exemplo, uma rotação, uma força ou um momento. Enfatizamos que ao referirmos a uma rotação como vetor restringimo-nos, obrigatoriamente, a uma pequena rotação. Grandes rotações não são vetores no espaço tridimensional (Argyris, 1982).

Os deslocamentos nodais do elemento no sistema local são dados por (3.74). Se no sistema global forem

$$fd_g^T = \begin{matrix} \mathbf{j} \\ U_1 & V_1 & W_1 & \mu_{x1} & \mu_{y1} & \mu_{z1} & \dots & U_6 & V_6 & W_6 & \mu_{x6} & \mu_{y6} & \mu_{z6} \\ \mathbf{k} \end{matrix} \quad (3.81)$$

então

$$fdg = [T_5] fd_g \quad (3.82)$$

Um vetor normal ao plano do triângulo, apontando no mesmo sentido de z, é dado pelo produto vetorial

$$\mathbf{V}_{12} \wedge \mathbf{V}_{13} = (Y_{21}Z_{31} \mathbf{i} - Z_{21}Y_{31})\mathbf{j} + (Z_{21}X_{31} \mathbf{i} - X_{21}Z_{31})\mathbf{j} + (X_{21}Y_{31} \mathbf{i} - Y_{21}X_{31})\mathbf{k}. \quad (3.89)$$

O módulo deste vetor é, por definição do produto vetorial, o dobro da área do triângulo:

$$2A = \sqrt{(Y_{21}Z_{31} \mathbf{i} - Z_{21}Y_{31})^2 + (Z_{21}X_{31} \mathbf{i} - X_{21}Z_{31})^2 + (X_{21}Y_{31} \mathbf{i} - Y_{21}X_{31})^2}. \quad (3.90)$$

O vetor unitário na mesma direção e sentido de z é

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_z &= \frac{1}{2A} \mathbf{h} (Y_{21}Z_{31} \mathbf{i} - Z_{21}Y_{31})\mathbf{j} + (Z_{21}X_{31} \mathbf{i} - X_{21}Z_{31})\mathbf{j} + (X_{21}Y_{31} \mathbf{i} - Y_{21}X_{31})\mathbf{k} \\ &= C_{zx}\mathbf{j} + C_{zy}\mathbf{j} + C_{zz}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Finalmente, o co-seno dos ângulos entre y e os eixos globais são determinados dos componentes do vetor unitário na mesma direção e sentido de y:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_y &= \mathbf{V}_z \wedge \mathbf{V}_x \\ &= (C_{zy}C_{xz} \mathbf{i} - C_{zz}C_{xy})\mathbf{j} + (C_{zz}C_{xx} \mathbf{i} - C_{zx}C_{xz})\mathbf{j} + (C_{zx}C_{xy} \mathbf{i} - C_{zy}C_{xx})\mathbf{k} \\ &= C_{yx}\mathbf{j} + C_{yy}\mathbf{j} + C_{yz}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Assim, os componentes de [I] ...cam de...nidos em (3.86), (3.91) e (3.92).

3.8 Travamento de Membrana

O travamento de cisalhamento é interno ao AST6S, pois tem origem na própria aproximação quadrática escolhida para w , \bar{u}_x e \bar{u}_y .

O travamento de membrana, no caso específico de uma malha formada pelo elemento aqui desenvolvido, é oriundo do acoplamento entre a rigidez de flexão de um elemento da malha com a rigidez de membrana dos elementos vizinhos ao longo das interfaces comuns. Portanto, este travamento para ocorrer precisa que os elementos que chegam em um nó sejam não coplanares.

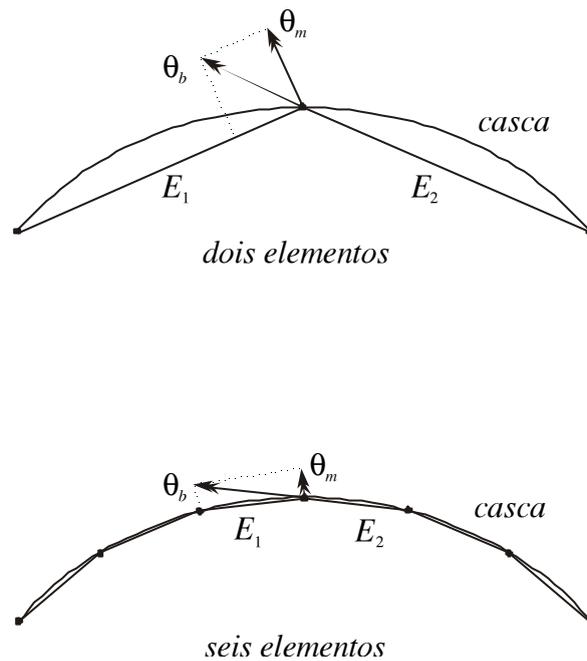


Fig. 3.9 Casca modelada por elementos planos.

A Fig. 3.9 esboça uma casca discretizada, numa dada direção, por duas malhas de elementos planos. Analisemos o nó compartilhado pelos elementos E_1 e E_2 .

A rotação nodal μ_b , associada à rigidez de flexão do elemento E_2 , tem um componente μ_m normal ao elemento E_1 que é associado, por sua vez, à rigidez de membrana deste elemento (rigidez artificial no caso do AST6S). Assim, parte da rotação de flexão de E_2 é resistida pela rigidez de membrana de E_1 . Por um raciocínio análogo, o componente do deslocamento nodal normal ao elemento E_2 , associado à sua rigidez de flexão, será parcialmente resistido pela rigidez de membrana de E_1 . Sabe-se que à medida que a casca torna-se mais fina, a magnitude da rigidez de membrana torna-se maior que a de flexão, fazendo a rigidez de membrana do elemento E_1 enrijecer, travar, mais e mais, os movimentos de flexão do elemento E_2 (Cook, 1993; Sydenstricker e Landau, 2000).

Para o caso exemplificado em que uma superfície curva é aproximada por uma poliédrica, o refinamento da malha aumenta a coplanaridade dos elementos que chegam em um nó fazendo desaparecer a interação da rigidez de flexão de um elemento com a rigidez de membrana do outro e, por sua vez, o próprio travamento.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Os seis exemplos deste capítulo demonstram aspectos de eficiência e de limitação do AST6S. Sua precisão e convergência são comparadas com as do TRIA6 (MSC/Nastran). Algumas das soluções analíticas apresentadas foram por nós obtidas. Em todos os exemplos, o fator de correção $k = 5/6$ é utilizado para o cisalhamento transversal.

4.1 Placa Laminada Simétrica

A placa da Fig. 4.1 é quadrada, de lado L , espessura h , formada por lâminas de mesma espessura do material

$$E_1 = 25E_2 \quad G_{12} = G_{13} = 0,5E_2 \quad G_{23} = 0,2E_2 \quad \nu_{12} = 0,25, \quad (4.1)$$

cujos coeficientes são característicos do graute-epóxi. A placa está sujeita a uma carga uniformemente distribuída q , apresenta laminação cross-ply $(0, 90, 0)_s$ e tem bordas apoiadas tais que

$$\begin{aligned} v = w = \mu_x = N_x = M_x = 0 & \quad \text{em } x = 0, L \\ u = w = \mu_y = N_y = M_y = 0 & \quad \text{em } y = 0, L. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com essa geometria e condições de contorno, é possível obter a solução de Navier (Reddy, 1997) para o problema e escrever

$$w\left(\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right) = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} W_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad (4.3)$$

onde

$$W_{mn} = \frac{16q}{c^{3/4} mn}. \quad (4.4)$$

Na teoria de Kirchhoff o parâmetro c é dado por

$$c = \frac{3}{L} \sqrt[4]{4E} \sqrt{D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + D_{22}n^4}, \quad (4.5)$$

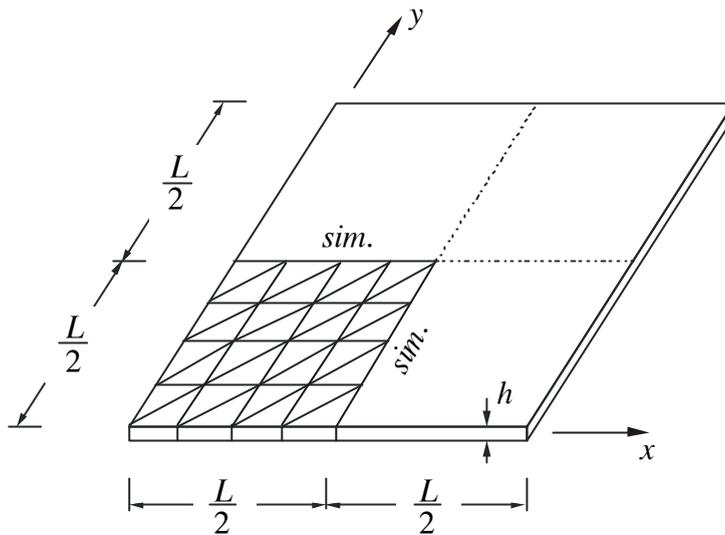


Fig. 4.1 Placa laminada quadrada simplesmente apoiada, sujeita a uma carga uniformemente distribuída q , com um quarto discretizado numa malha 4x4.

e na de Reissner-Mindlin por

$$C = S_{33} + \frac{S_{34} (S_{35}S_{45} + S_{34}S_{55}) + S_{35} (S_{34}S_{45} + S_{35}S_{44})}{S_{44}S_{55} + S_{45}^2}, \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{33} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L G_{55} m^2 + G_{44} n^2 \, dx \, dy \\ S_{34} &= \frac{1}{L} G_{55} m \\ S_{35} &= \frac{1}{L} G_{44} n \\ S_{44} &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^L D_{11} m^2 + D_{66} n^2 + G_{55} \, dx \, dy \\ S_{45} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L \int_0^L (D_{12} + D_{66}) mn \, dx \, dy \\ S_{55} &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^L D_{66} m^2 + D_{22} n^2 + G_{44} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A Tabela 4.1 contém a solução (4.3) para $m = n = 1, 3, \dots, 501$, adimensionalizada na forma $100w(E_2 h^3 = qL^4)$.

Tabela 4.1 Solução de Navier para $100w(E_2h^3=qL^4)$ no centro da placa $(0, 90, 0)_s$ obtida com $m = n = 1, 3, \dots, 501$.

L=h	Reissner-Mindlin
1	25,966
2	7,045
3	3,536
4	2,302
5	1,728
10	0,952
20	0,753
50	0,697
100	0,689
1000	0,686
Kirchhoff	0,686

A placa neste exemplo apresenta comportamento simétrico em relação a $x = L/2$ e $y = L/2$, pois são simétricos em relação a esses eixos: a geometria, incluindo as condições de contorno; as propriedades elásticas; o carregamento. Na determinação da deflexão no centro da placa usando o AST6S e o TRIA6, a dupla simetria permite que apenas um quarto da placa seja discretizado impondo-se

$$u = \mu_y = 0 \quad \text{em } x = \frac{L}{2} \quad v = \mu_x = 0 \quad \text{em } y = \frac{L}{2}. \quad (4.8)$$

Os resultados normalizados em relação à solução de Navier para a teoria de Kirchhoff, $w_k = 0,686$, são mostrados na Fig. 4.2 para a malha 4×4 . A perfeita concordância do AST6S com a solução exata é evidente para qualquer valor de $L=h$. É evidente, também, a ausência de travamento associado ao cisalhamento transversal para grandes valores de $L=h$. O resultado do TRIA6 é cada vez mais discrepante à medida que a placa torna-se mais espessa. Será o elemento não convergente para a teoria de Reissner-Mindlin quando os valores de $L=h$ são pequenos, ou será o fator de correção $k = 5/6$?

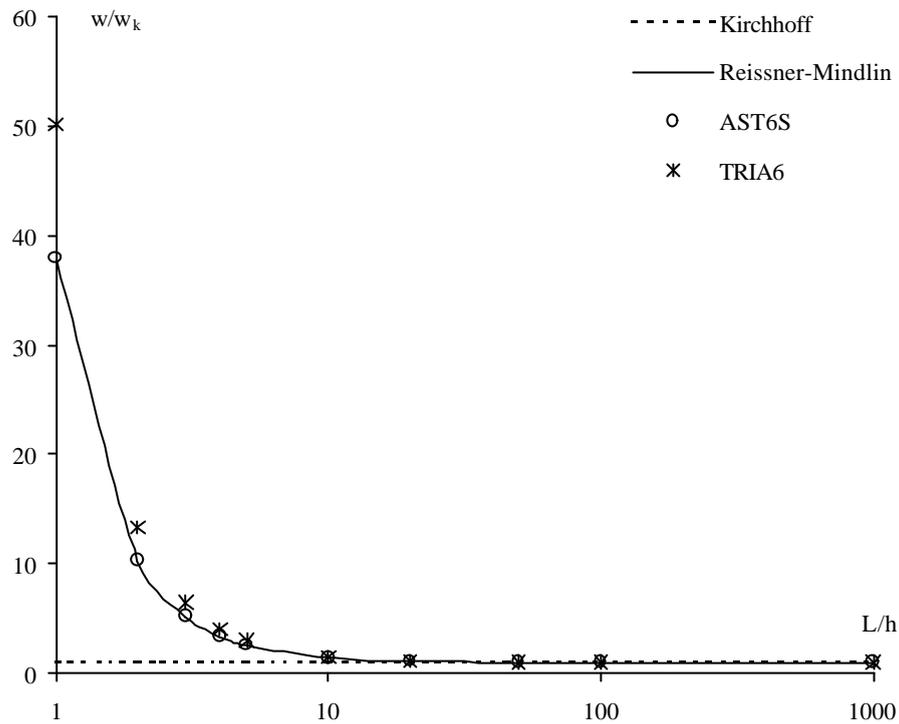


Fig. 4.2 Deflexão no centro da placa $(0, 90, 0)_S$, normalizada em relação a $w_k = 0; 686$.

4.2 Placa Laminada Anti-Simétrica

Vamos agora admitir que a placa da Fig. 4.1 tenha laminação angle-ply $(\pm 45, 45)_4$ e que as bordas sejam tais que

$$\begin{aligned} u = w = \mu_x = N_{xy} = M_x = 0 & \quad \text{em } x = 0, L \\ v = w = \mu_y = N_{xy} = M_y = 0 & \quad \text{em } y = 0, L. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A anti-simetria faz alguns coeficientes da matriz $[B]$ ser não nulos, resultando em acoplamento entre a rigidez de membrana e a de flexão mas ainda permitindo a solução de Navier para o problema. A deflexão no centro da placa continua sendo dada por (4.3), que pela teoria de Kirchhoff se deve substituir em (4.4)

$$c = c_{33} + \frac{c_{13}(c_{12}c_{23} + c_{13}c_{22}) + c_{23}(c_{12}c_{13} + c_{11}c_{23})}{c_{11}c_{22} + c_{12}^2}, \quad (4.10)$$

com

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L A_{11} m^2 + A_{66} n^2 dx & c_{12} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L (A_{12} + A_{66}) mn dx \\
 c_{13} &= i \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L 3B_{16} m^2 + B_{26} n^2 dx & c_{22} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L A_{66} m^2 + A_{22} n^2 dx \\
 c_{23} &= i \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L B_{16} m^2 + 3B_{26} n^2 dx & & \\
 c_{33} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 + D_{22} n^4 dx. & & (4.11)
 \end{aligned}$$

Se a teoria de Reissner-Mindlin for utilizada, o coeficiente W_{mn} é determinado da solução do sistema

$$\begin{array}{cccccc}
 \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 4 \end{array} & \begin{array}{cccccc} S_{11} & S_{12} & 0 & S_{14} & S_{15} \\ & S_{22} & 0 & S_{24} & S_{25} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ & & & S_{44} & S_{45} \\ & & & & S_{55} \end{array} & \begin{array}{c} 38 \\ \vdots \\ 5 \end{array} & = & \begin{array}{cccc} 9 & 8 & 9 \\ U_{mn} & V_{mn} & W_{mn} \\ X_{mn} & Y_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & , & (4.12)
 \end{array}$$

sim.

onde

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L A_{11} m^2 + A_{66} n^2 dx & s_{12} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L (A_{12} + A_{66}) mn dx \\
 s_{14} &= 2 \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L B_{16} m n dx & s_{15} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L B_{16} m^2 + B_{26} n^2 dx \\
 s_{22} &= \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L A_{66} m^2 + A_{22} n^2 dx & s_{24} &= s_{15} \\
 s_{25} &= 2 \frac{3}{L} \frac{1}{4} \int_0^L B_{26} m n dx & & & (4.13)
 \end{aligned}$$

e os demais coeficientes são dados por (4.7). A Tabela 4.2 contém a solução (4.3) para $m = n = 1, 3, \dots, 501$, adimensionalizada na forma $100w(E_2 h^3 = qL^4)$. A mudança de laminação faz perder a simetria das propriedades elásticas em relação a $x = L/2$ e $y = L/2$, mas as séries trigonométricas usadas na solução Navier ajudam a identificar as condições

$$v = \mu_y = 0 \quad \text{em } x = \frac{L}{2} \quad u = \mu_x = 0 \quad \text{em } y = \frac{L}{2}, \quad (4.14)$$

permitindo que a mesma malha 4×4 da Fig. 4.1 seja ainda utilizada. Os resultados do AST6S e do TRIA6, normalizados em relação à solução de Navier para a teoria de Kirchhoff $w_k = 0; 386$, são mostrados na Fig. 4.3. A conclusão que se tira sobre a performance dos dois elementos neste exemplo é a mesma do exemplo anterior.

Tabela 4.2 Solução de Navier para $100w(E_2h^3=qL^4)$ no centro da placa $(j\ 45, 45)_4$ obtida com $m = n = 1, 3, \dots, 501$.

L=h	Reissner-Mindlin
1	25,641
2	6,697
3	3,189
4	1,961
5	1,393
10	0,637
20	0,448
50	0,396
100	0,388
1000	0,386
<hr/>	
Kirchhoff	0,386

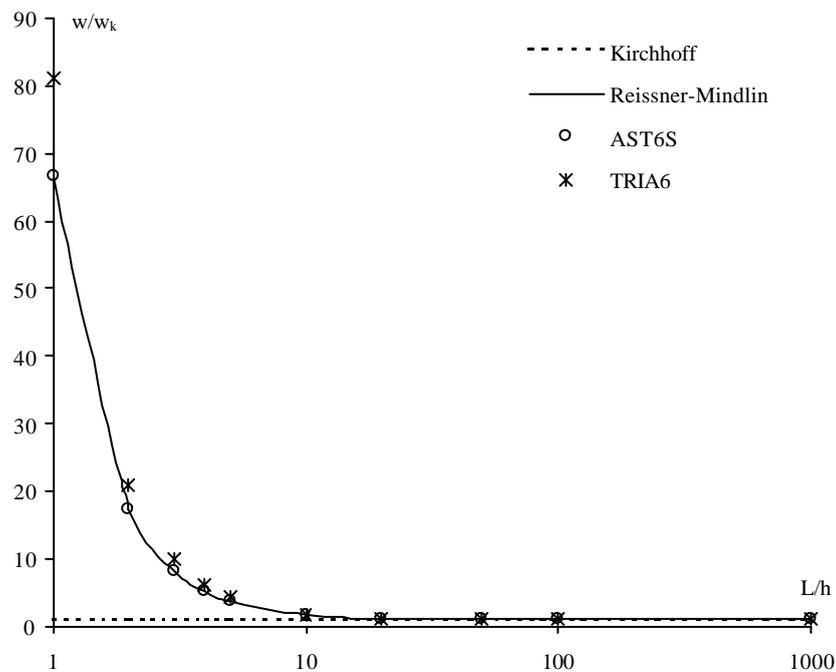


Fig. 4.3 Deflexão no centro da placa $(j\ 45, 45)_4$, normalizada em relação a $w_k = 0; 386$.

4.3 Pórtico

O pórtico da Fig. 4.4a é de um material homogêneo e isotrópico, e está submetido a uma força aplicada na extremidade livre, ora no seu plano (F_1) ora perpendicular a este (F_2). A Tabela 4.3 contém a solução analítica para o deslocamento na direção da força aplicada usando a teoria de vigas de Timoshenko.

Tabela 4.3 Deslocamento na direção da força aplicada, segundo a teoria de vigas de Timoshenko.

h (m)	F_1 (N)		F_2 (N)	
	0,3	0,003	0,3	0,003
sol. analítica	$1,976 \times 10^{-2}$	$1,975 \times 10^{-2}$	$1,001 \times 10^{-2}$	$7,408 \times 10^{-3}$

* resultado com a constante de torção $J = 0,090 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ (Oden e Ripperger, 1981)

O objetivo do exemplo é mostrar que a mudança do carregamento de F_1 para F_2 provoca travamento de membrana, que se acentua quando a espessura h é reduzida de 0,3 m para 0,003 m. Na análise $\varphi = 0$ para remoção do efeito da curvatura anticlástica e o carregamento é distribuído de maneira consistente com a interpolação quadrática.

Com a aplicação de F_1 e a discretização mostrada na Fig. 4.4b, o deslocamento do nó central da extremidade livre coincide com os correspondentes resultados da Tabela 4.3 independentemente do valor de φ , desde que este não seja nulo para se evitar singularidade. Neste problema específico, é possível remover este parâmetro. O travamento de membrana não ocorre, pois na junção da barra horizontal com a vertical, onde os elementos são não coplanares, a rotação devido à flexão é perpendicular à rotação normal (com rigidez artificial) ao plano dos elementos. As interações dos deslocamentos de membrana e de flexão, na mesma junção, não resultam em travamento uma vez que são interações naturais, sem nenhuma influência de aproximação geométrica do modelamento. O carregamento solicita a estrutura

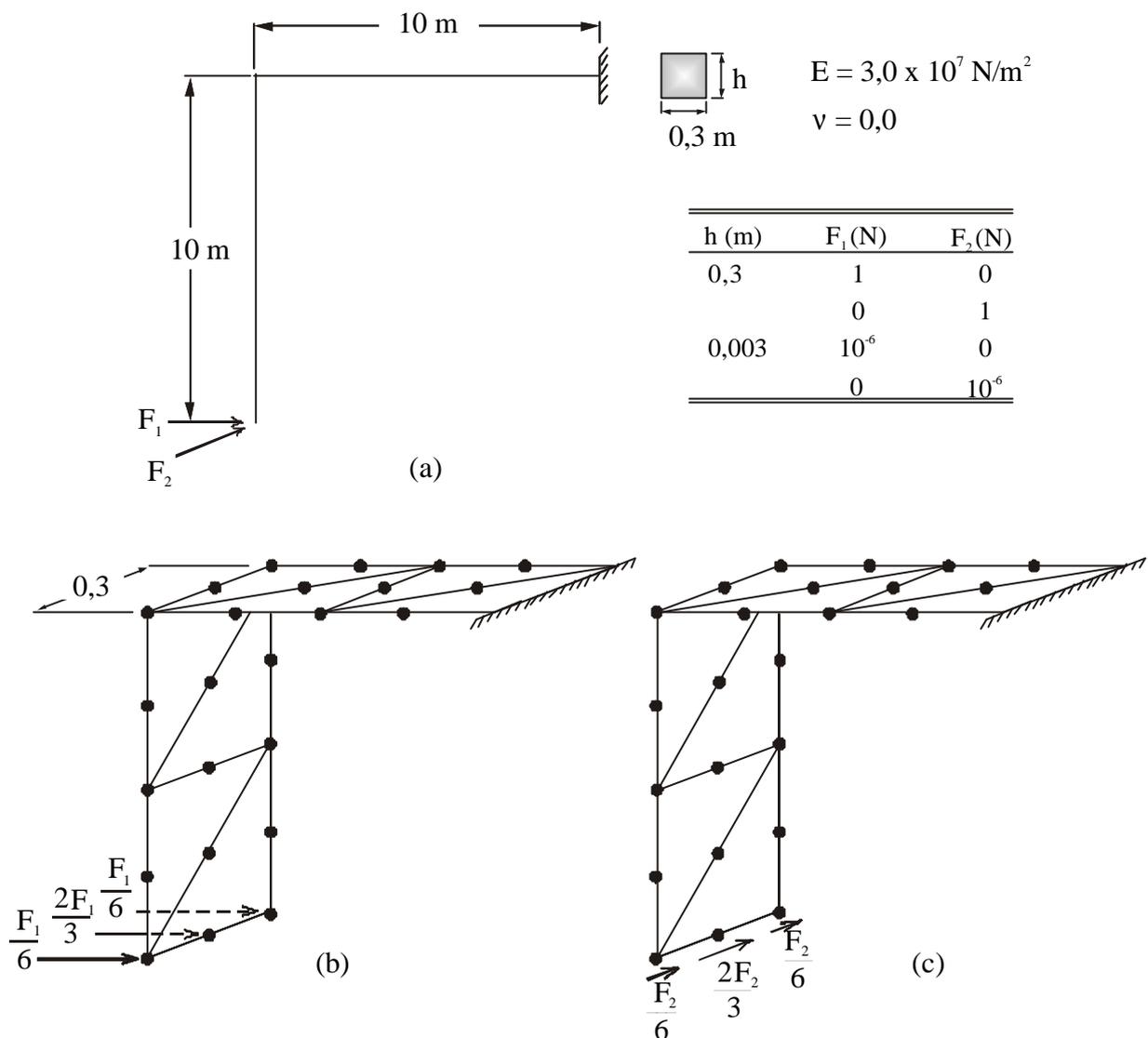
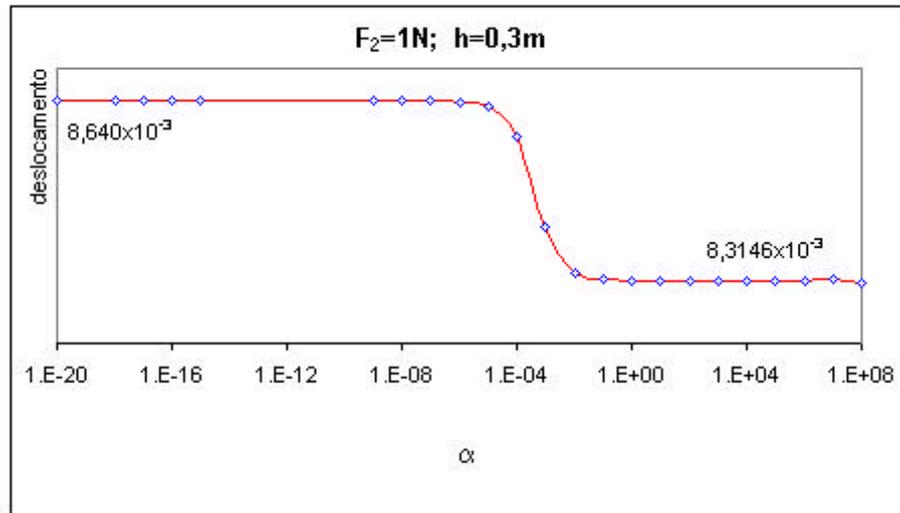


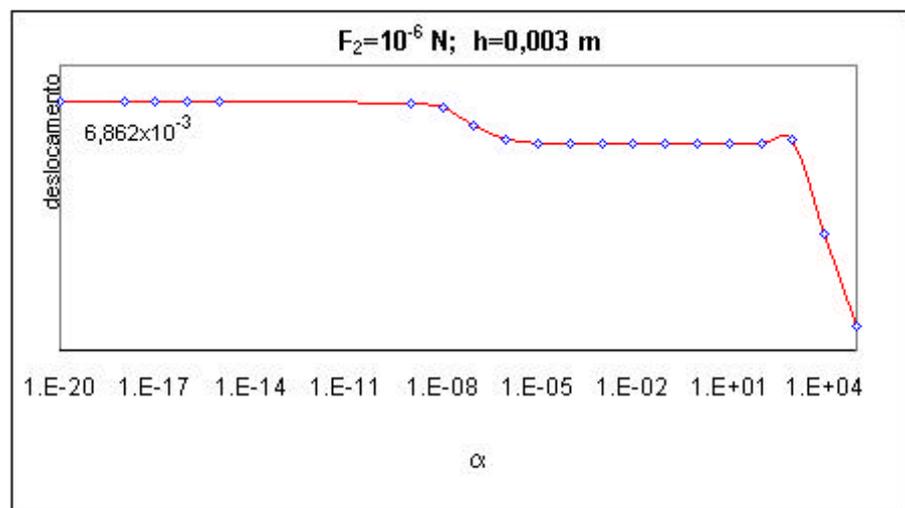
Fig. 4.4 Pórtico: (a) geometria e carregamento; (b) discretização com F_1 ; (c) discretização com F_2 .

preponderantemente à flexão, sendo $[K_b]$ e $[K_s]$ as parcelas mais significativas do elemento. Este fato explica o excelente resultado para a malha utilizada.

A aplicação de F_2 provoca flexão da barra vertical e flexo-torção da barra horizontal. O uso da discretização indicada na Fig. 4.4c faz a flexão das duas barras ser modelada por $[K_m]$ e apenas a torção da barra horizontal por $[K_b]$ e $[K_s]$. O erro cometido no deslocamento do nó central da extremidade livre na direção de F_2 , após a completa remoção de ® , é de i 13;7% e i 7;4% para a espessura $h = 0;3$ m e



(a)



(b)

Fig. 4.5 Sensibilidade da solução com relação ao parâmetro α : (a) $F_2 = 1 N$ e $h = 0,3 m$; (b) $F_2 = 10^{-6} N$ e $h = 0,003 m$.

$h = 0,003 m$, respectivamente. A precisão do resultado deteriora quando se troca F_1 por F_2 devido ao uso de $[K_m]$ na conexão. Uma precaução deve, agora, ser tomada se α não for removido. A rotação oriunda da torção da barra horizontal acopla-se, na junção das barras, com a rotação normal (com rigidez artificial) ao plano dos elementos da barra vertical. A Fig. 4.5 mostra os resultados para diferentes valores de α e $h = 3 m$. O travamento de membrana é evidente, ampliando-se quando a espessura é reduzida para $h = 0,003 m$ (Fig. 4.5b). O refinamento

da malha não alivia o travamento, pois a geometria é modelada com exatidão pelo AST6S. Para ambas as espessuras, os resultados são insensíveis a $\epsilon < 10^{-9}$, devendo este parâmetro não ser nulo para se evitar singularidade.

4.4 Painel Cilíndrico

Este problema, mostrado na Fig. 4.6 e idealizado por Scordelis e Lo (1969), consiste de um painel cilíndrico

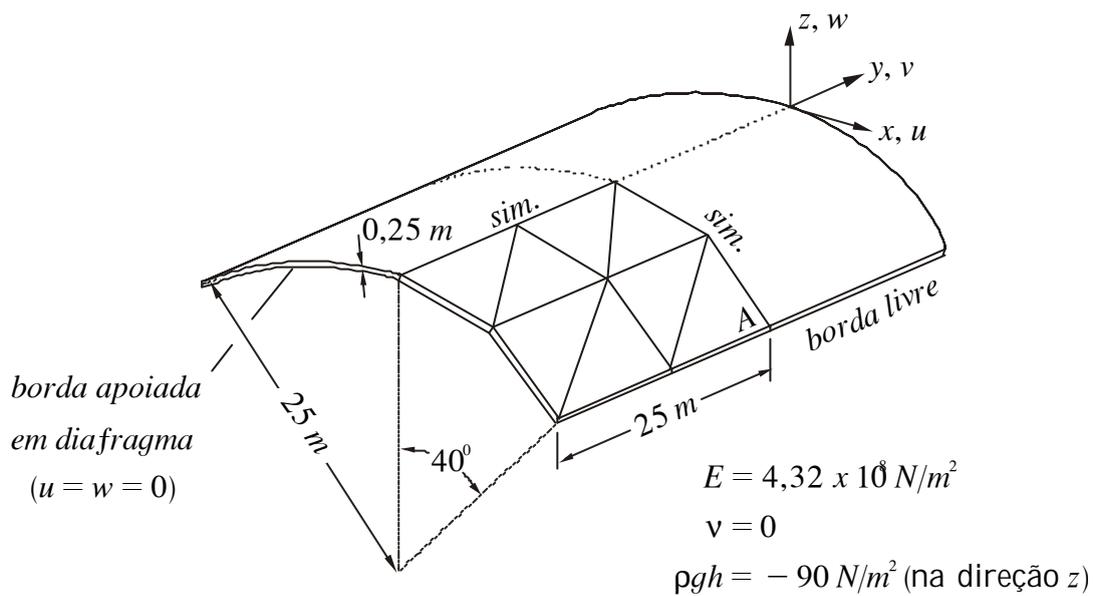


Fig. 4.6 Painel cilíndrico sujeito ao peso próprio (por unidade de área da superfície média), com um quarto discretizado numa malha 2×2 .

homogêneo e isotrópico sujeito ao peso próprio (por unidade de área da superfície média). As bordas curvas são apoiadas em diafragmas e as demais são livres. A existência de dupla simetria permite que se analise apenas um quarto do painel.

O deslocamento vertical do ponto A, normalizado em relação ao valor 0;3024 m recomendado por MacNeal e Harder (1985), é apresentado na Tabela 4.4. O refinamento da malha tende a ser duplamente benéfico: reduz o elemento, implicando melhor representação das variáveis quadraticamente aproximadas; faz a geometria poliédrica da superfície discretizada aproximar-se da curva. Comparado com o TRIA6, os resultados mostram que o AST6S é melhor em precisão e convergência. Segundo Belytschko et al. (1989), a estrutura presta-se pouco ao teste do travamento de

membrana e quase nada ao de cisalhamento. A solução é insensível a 10^{-10} , independentemente da malha.

Tabela 4.4 Deslocamento vertical do ponto A, normalizado em relação a 0;3024 m.

Malha	AST6S	TRIA6
2 \times 2	1;180	1;198
4 \times 4	1;008	1;046
8 \times 8	1;000	1;044

4.5 Casca Cilíndrica

A casca cilíndrica da Fig. 4.7 tem as bordas apoiadas em diafragmas e está sujeita a duas cargas concentradas $F = 1$ N, diametralmente opostas, eqüidistantes das bordas. A existência de dupla simetria permite que apenas um oitavo da casca seja analisado.

O deslocamento vertical do ponto A para $h = 3$ cm, normalizado em relação ao valor $0;18248 \times 10^{-4}$ m (Dvorkin e Bathe, 1984), é apresentado na Tabela 4.5. O AST6S mostra-se mais rígido do que o TRIA6, possivelmente devido a travamento de membrana. Belytschko et al. (1989) mostram que a estrutura presta-se tanto ao teste do travamento de membrana quanto ao de cisalhamento, sendo este último mais severo.

Se existe travamento nesta solução com o AST6S, certamente ocorre por causa da aproximação poliédrica que é dada à superfície curva cilíndrica. Com o objetivo de isolar o possível travamento de membrana, vamos usar o deslocamento vertical do ponto A determinado com a malha 16×16 como referência, observando como a solução varia para uma gradual redução do número de elementos na direção axial e circunferencial.

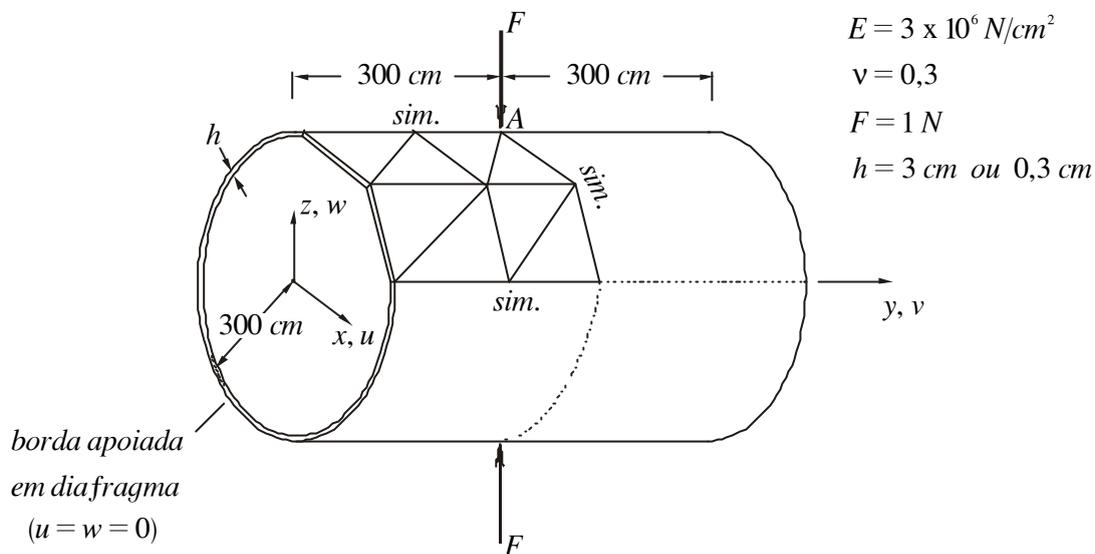


Fig. 4.7 Casca cilíndrica sujeita a duas cargas concentradas, diametralmente opostas, com um oitavo discretizado numa malha 2×2 .

A casca cilíndrica da Fig. 4.7 tem as bordas apoiadas em diafragmas e está sujeita a duas cargas concentradas $F = 1 \text{ N}$, diametralmente opostas, equidistantes das bordas. A existência de dupla simetria permite que apenas um oitavo da casca seja analisado.

O deslocamento vertical do ponto A para $h = 3 \text{ cm}$, normalizado em relação ao valor $0,18248 \times 10^{-4} \text{ m}$ (Dvorkin e Bathe, 1984), é apresentado na Tabela 4.5. O AST6S mostra-se mais rígido do que o TRIA6, possivelmente devido a travamento de membrana. Belytschko et al. (1989) mostram que a estrutura presta-se tanto ao teste do travamento de membrana quanto ao de cisalhamento, sendo este último mais severo.

Se existe travamento nesta solução com o AST6S, certamente ocorre por causa da aproximação poliédrica que é dada à superfície curva cilíndrica. Com o objetivo de isolar o possível travamento de membrana, vamos usar o deslocamento vertical do ponto A determinado com a malha 16×16 como referência, observando como a solução varia para uma gradual redução do número de elementos na direção axial e circunferencial.

Tabela 4.5 Deslocamento vertical do ponto A para $h = 3$ cm, normalizado em relação a $0,18248 \times 10^{-4}$ m.

Malha	AST6S	TRIA6
2 \times 2	0; 105	0; 106
4 \times 4	0; 648	0; 672
8 \times 8	0; 926	0; 976
16 \times 16	0; 999	1; 020

A Fig. 4.8 mostra os resultados obtidos com $h = 3$ cm e $h = 0,3$ cm, onde a espessura menor é introduzida para ampliar o efeito do possível travamento. Nota-se que a redução do número de elementos na direção axial, cuja curvatura nula não altera a coplanaridade entre elementos vizinhos, tem praticamente igual influência nos resultados para as duas espessuras. A precisão parece relacionar-se diretamente com a discretização mais grosseira das equações de equilíbrio. No entanto, a redução do número de elementos na direção circunferencial, cuja curvatura faz aumentar a não coplanaridade entre elementos vizinhos, enrijece a casca, tornando a de menor espessura relativamente mais rígida. É o travamento de membrana!

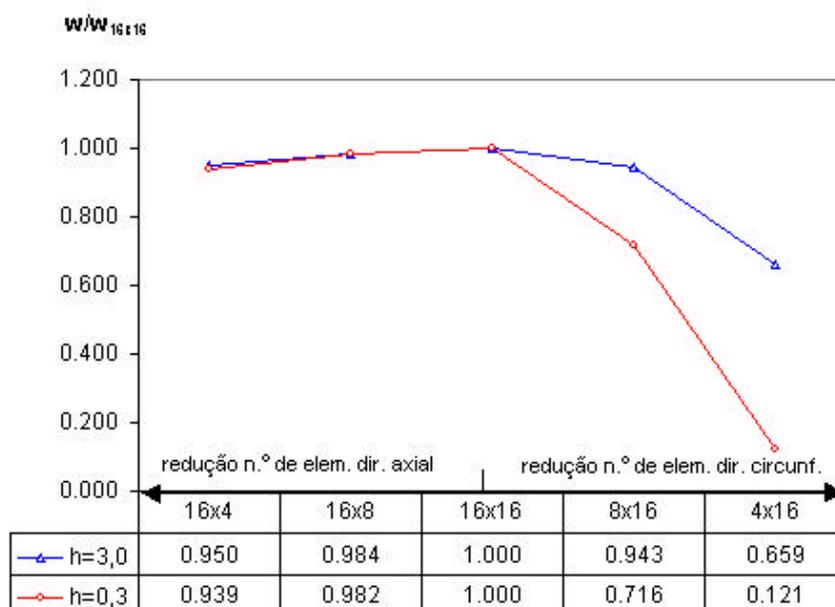


Fig. 4.8 Deslocamento vertical do ponto A para diferentes malhas, normalizado em relação ao deslocamento determinado com a malha 16 \times 16.

Todos os resultados podem ser obtidos com $\times 10^i$.

4.6 Casca Cilíndrica Laminada

Neste último exemplo, a casca cilíndrica da Fig. 4.7 é considerada laminada cross-ply $(0, 90, 0)_s$, na qual as lâminas são orientadas em relação à direção axial. A casca tem espessura $h = 3$ cm, dividida igualmente entre as seis lâminas constituídas do material (4.1), com os seguintes valores numéricos

$$\begin{aligned} E_1 &= 2;1 \times 10^6 \text{ N/cm}^2 & G_{12} &= G_{13} = 4;2 \times 10^4 \text{ N/cm}^2 \\ G_{23} &= 1;68 \times 10^4 \text{ N/cm}^2 & \nu_{12} &= 0;25. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A existência de dupla simetria permite que apenas um oitavo da cascas seja analisado. O deslocamento vertical do ponto A, normalizado em relação a $1;4232 \times 10^i$ m obtido pelo elemento QUAD4 (MSC/Nastran) é apresentado na Tabela 4.6. Os resultados são excelentes. A comparação das Tabelas 4.5 e 4.6 surpreende pelo fato de a mudança de material ter influenciado tanto a performance do AST6S quanto a do TRIA6.

Tabela 4.6 Deslocamento vertical do ponto A, normalizado em relação a $1;4232 \times 10^i$ m.

Malha	AST6S	TRIA6
2 x 2	0;962	1;124
4 x 4	1;082	1;138
8 x 8	1;001	1;049
16 x 16	0;981	1;013

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Os testes numéricos idealizados na literatura para detectar a presença de travamento de cisalhamento em $[K_b] + [K_s]$ são aplicados ao AST 6S por Sze et al. (1997) e Rosa (1999), tendo o elemento jamais evidenciado esse tipo de travamento. No texto, os Exemplos 1, 2, 3 e 5 corroboram tal afirmativa.

No caso específico do estudo de placas, o AST 6S é competitivo com os melhores elementos triangulares de seis nós disponíveis na literatura. Uma vantagem a mais apresentada pelo elemento, que poucos possuem, é a forma explícita de sua matriz de rigidez. Fato decisivo na escolha e implementação do elemento por Alves (2002).

A aplicação do elemento a cascas mostra que o travamento de membrana pode ocorrer como consequência da representação poliédrica da superfície curva. O efeito de tal travamento é acentuado para estruturas mais finas, porém é minimizado com o refinamento da malha. Em estruturas naturalmente poliédricas, representadas no texto pelo pórtico do Exemplo 3, o travamento, quando existe, é provocado unicamente pela rigidez artificial.

Na forma como o elemento está implementado, um mesmo fator α associado à rigidez artificial é utilizado em toda a malha. Isto significa dizer que a necessidade de adição dessa rigidez é nivelada pelo nó mais carente. Acreditamos que o travamento de membrana possa ser aliviado, melhorando a velocidade de convergência, se a rigidez fosse diretamente adicionada a um nó da seguinte forma: define-se um plano médio a partir dos planos dos elementos que ali chegam e, em seguida, adiciona-se a rigidez artificial na direção da rotação normal a este plano, após ponderar o fator α conforme o grau de coplanaridade dos elementos.

Seria vantajoso o uso de um procedimento que evitasse a inversão de $[F_{M_2}]$ necessário à linearização da deformação de cisalhamento transversal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Argyris, J. An excursion into large rotations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- Alves, E. C. Análise de sensibilidade e otimização de estruturas submetidas a vibrações aleatórias, São José dos Campos. (INPE). Dissertação (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espacial) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2002.
- Babuska, I.; Oden, J. T.; Lee, J. K. Mixed-hybrid finite element approximations of second-order elliptic boundary-value problems, The Texas Institute of Computational Mechanics, Report 75-7, 1975.
- Bathe, K. J.; Brezzi, F.; Cho, S. W. The MITC7 and MITC9 plate bending element, *Comput. Struct.*, v. 32, p. 797–814, 1989.
- Belytschko, T. L.; Wong, B. L.; Stolarsky, H. Assumed strain stabilization procedure for the 9 - node lagrange shell element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 28, p. 385 - 414, 1989.
- Cheung, Y. K.; Chan, H. C. A family of rectangular bending elements, *Comp. Struct.*, v. 10, p. 613–619, 1979.
- Cheung, Y. K.; Wong, P. M.; Chan, H. C. Generation of higher order subparametric bending elements, *Eng. Struct.*, v. 2, p. 2 - 8, 1980.
- Chun, C. K.; Dong, S. B. Shear constitutive relations for laminated anisotropic shells and plates — Part II: Vibrations of composite cylinders, *J. Appl. Mech.*, v.59, p. 380 - 389, 1992.
- Cook, R. D. Further development of a three - node triangular shell element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 36, p. 1413–1425, 1993.

- Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E. Concepts and applications of finite element analysis, New York: John Wiley, 1989.
- Donea, J.; Lamain, L. G. A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 63, p. 183-207, 1987.
- Dong, S. B.; Chun, C. K. Shear constitutive relations for laminated anisotropic shells and plates — Part I: Methodology, *J. Appl. Mech.*, v. 59, p. 372 – 379, 1992.
- Dvorkin, E. N.; Bathe, K. J. A continuum mechanics based four - node shell element for general nonlinear analysis, *Eng. Comp.*, v. 1, p. 77 – 88, 1984.
- Heppler, G. R.; Hansen, J. S. A Mindlin element for thick and deep shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 54, p. 21 – 47, 1986.
- Hughes, T. J. R.; Tezduyar, T. E. Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four - node bilinear isoparametric element, *J. Appl. Mech.*, v. 48, p. 587 – 596, 1981.
- Jones, R. M. Mechanics of composite materials. Philadelphia: Taylor and Francis, 1999.
- Koziey, B. L.; Mirza, F. A. Consistent thick shell element, *Comput. Struct.*, v. 65, p. 531 – 549, 1997.
- MacNeal, R. H. Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions, *Nuclear Eng. Des.*, v. 70, p. 3–12, 1982.
- MacNeal, R. H. Finite elements: their design and performance, New York: Marcel Dekker, 1994.
- MacNeal, R. H.; Harder, R. L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elem. Anal. Des.*, v. 1, p. 3–20, 1985.

- Malkus, D. S.; Hughes, T. J. R. Mixed finite element methods — reduced and selective integration techniques: A unification of concepts, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 15, p. 63–81, 1978.
- Mindlin, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, v. 18, p. 31–38, 1951.
- MacNeal-Schwendler Corporation Software/NASTRAN for Windows, versão 4.5.
- Noor, A. K.; Burton, W. S., Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Appl. Mech. Rev.*, v. 42, p. 1–13, 1989.
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. Finite element analysis of anisotropic plates, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 11, p. 289–307, 1977.
- Noor, A. K.; Mathers, M. D. Shear-flexible finite element models of laminated composite plates and shells, (NASA TN-D-8044, 1975).
- Oden, J. T.; Ripperger, E. A. *Mechanics of elastic structures*. New York: Mac Graw-Hill, 1981.
- Oguamanam, D. C. D.; Hansen, J. S.; Heppler, G. R. The simplest plate bending finite elements, (preprint), 1998.
- Prathap, G., *The finite element method in structural mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- Reddy, J. N., *An introduction to the finite element method*. New York: McGraw - Hill, 1993.
- Reddy, J. N. A simple higher - order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.*, v. 51, p. 745–752, 1984.
- Reddy, J. N., *Mechanics of laminated composite plates — theory and analysis*, Boca Raton: CRC Press, 1997.

- Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, v. 67, p. 69–77, 1945.
- Rosa, W. L. Elemento finito triangular C^0 para placas segundo a teoria de Reissner-Mindlin. São José dos Campos. Trabalho de Graduação - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1999.
- Scordelis, A.C.; Lo, K. S. Computer analysis of cylindrical shells, *J. Amer. Concr. Inst.*, v. 61, p. 539 – 561, 1969.
- Sydenstricker, R. M.; Landau, L. A study of some triangular discrete Reissner-Mindlin plate and shell elements, *Comp. Struct.*, v.78, p. 21 – 33, 2000.
- Sze, K.Y.; Zhu, D.; Chen, D.P. Quadratic triangular C^0 plate bending element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 40, p. 937 – 951, 1997.
- Whitney, J. M. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *J. Appl. Mech.*, v. 40, p. 302 – 304, 1973.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The finite element method — Vol. 2: solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity, London: McGraw-Hill, 1991.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Too, J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, v. 3, p. 275 – 290, 1971.

APÊNDICE A

O AST6S E AS PLACAS DE KIRCHHOFF

À medida que uma placa de Reissner-Mindlin torna-se ...na, $\sigma_{xz}, \sigma_{yz} \rightarrow 0$ resultando, no limite,

$$\bar{m}_x = i \frac{\partial W}{\partial X} \quad \bar{m}_y = i \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (A.1)$$

e $\bar{m}_x = i \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$, $\bar{m}_y = i \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}$, $\bar{m}_{xy} = i \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y}$. As equações constitutivas (2.14) mostram que uma distribuição linear de momentos na teoria de placas de Kirchhoff relaciona-se com uma distribuição cúbica de w . Mostremos que $f^{\circ} M g^T = b^{\circ} q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_a \quad q_b \quad q_c \quad c$ é nulo, e portanto $f^{\circ} g = f_0 g$, quando os graus de liberdade nodais são prescritos de acordo com w cúbico e \bar{m}_x, \bar{m}_y derivados de (A.1).

No caso mais geral,

$$w = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3 \quad (A.2)$$

e, de (A.1) e (3.2),

$$\begin{aligned} \bar{m}_x &= i \frac{\partial W}{\partial X} = i \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + i \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \\ &= i \left[a_1 + 2a_3 x + a_4 y + 3a_6 x^2 + 2a_7 xy + a_8 y^2 \right] \frac{1}{x_2} \\ \bar{m}_y &= i \frac{\partial W}{\partial Y} = i \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + i \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} \\ &= i \left[a_1 + 2a_3 x + a_4 y + 3a_6 x^2 + 2a_7 xy + a_8 y^2 \right] \frac{x_3}{x_2 y_3} \\ &\quad + i \left[a_2 + a_4 x + 2a_5 y + a_7 x^2 + 2a_8 xy + 3a_9 y^2 \right] \frac{1}{y_3}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Os graus de liberdade nodais, prescritos segundo (A.2) e (A.3), são

$$w_1 = w(0; 0) = a_0$$

$$w_2 = w(1; 0) = a_0 + a_1 + a_3 + a_6$$

$$w_3 = w(0; 1) = a_0 + a_2 + a_5 + a_9$$

$$w_4 = w\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{4} + \frac{a_6}{8} + \frac{a_7}{8} + \frac{a_8}{8} + \frac{a_9}{8}$$

$$w_5 = w\left(0; \frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{4} + \frac{a_9}{8}$$

$$w_6 = w\left(\frac{1}{2}; 0\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_6}{8}$$

$$\bar{w}_{x1} = \bar{w}_x(0; 0) = i \frac{a_1}{x_2}$$

$$\bar{w}_{x2} = \bar{w}_x(1; 0) = i \frac{1}{x_2} (a_1 + 2a_3 + 3a_6)$$

$$\bar{w}_{x3} = \bar{w}_x(0; 1) = i \frac{1}{x_2} (a_1 + a_4 + a_8)$$

$$\bar{w}_{x4} = \bar{w}_x\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = i \frac{1}{x_2} \left[a_1 + a_3 + \frac{a_4}{2} + \frac{3a_6}{4} + \frac{a_7}{2} + \frac{a_8}{4} \right]$$

$$\bar{w}_{x5} = \bar{w}_x\left(0; \frac{1}{2}\right) = i \frac{1}{x_2} \left[a_1 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_8}{4} \right]$$

$$\bar{w}_{x6} = \bar{w}_x\left(\frac{1}{2}; 0\right) = i \frac{1}{x_2} \left[a_1 + a_3 + \frac{3a_6}{4} \right]$$

$$\bar{w}_{y1} = \bar{w}_y(0; 0) = \frac{x_3}{x_2 y_3} a_1 + i \frac{a_2}{y_3}$$

$$\bar{w}_{y2} = \bar{w}_y(1; 0) = \frac{x_3}{x_2 y_3} (a_1 + 2a_3 + 3a_6) + i \frac{1}{y_3} (a_2 + a_4 + a_7)$$

$$\bar{w}_{y3} = \bar{w}_y(0; 1) = \frac{x_3}{x_2 y_3} (a_1 + a_4 + a_8) + i \frac{1}{y_3} (a_2 + 2a_5 + 3a_9)$$

$$\bar{w}_{y4} = \bar{w}_y\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{x_3}{x_2 y_3} \left[a_1 + a_3 + \frac{a_4}{2} + \frac{3a_6}{4} + \frac{a_7}{2} + \frac{a_8}{4} \right] + i \frac{1}{y_3} \left[a_2 + \frac{a_4}{2} + a_5 + \frac{a_7}{4} + \frac{a_8}{2} + \frac{3a_9}{4} \right]$$

$$\bar{w}_{y5} = \bar{w}_y\left(0; \frac{1}{2}\right) = \frac{x_3}{x_2 y_3} \left[a_1 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_8}{4} \right] + i \frac{1}{y_3} \left[a_2 + a_5 + \frac{3a_9}{4} \right]$$

$$\bar{w}_{y6} = \bar{w}_y\left(\frac{1}{2}; 0\right) = \frac{x_3}{x_2 y_3} \left[a_1 + a_3 + \frac{3a_6}{4} \right] + i \frac{1}{y_3} \left[a_2 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_7}{4} \right] \quad (A.4)$$

A substituição desses valores em (3.37), (3.40) e (3.41) resulta $f^{\circ}_{Mg} = f_0g$.